# Глава III.6

## Разные задачи на газовые законы

1. *Определить, каким был бы коэффициент объёмного расширения идеального газа, если бы за начальный объём его принимали объём не при $0^oC$, а при $t^o_1 = 100^oC$?*

Решение. Температурный коэффициент объёмного расширения показывает относительное изменение объёма газа при его нагревании на $1^oC$: $\alpha = \Delta V/(V_o \Delta T)$, где $\Delta V = V - V_o$ – изменение объёма газа по сравнению с его объёмом $V_o$ при $0^oC$, $\Delta T$ – изменение температуры.

Тогда $\alpha' = \Delta V'/(V'_o \Delta T')$, где $\Delta V' = V - V'_o$ – изменение объёма газа по сравнению с его объёмом $V'_o$ при $T_1 = 373$ К, $\Delta T' = T - T_1$ – изменение температуры газа по сравнению с температурой $T_1 = 373$ К.

Для вычисления α' воспользуемся законом Гей-Люссака в виде $V = V_o \alpha T$, где $V_o$ – объём газа при температуре $0^oC$, α – температурный коэффициент объёмного расширения газа, T – абсолютная температура.

$V'_o = V_o\alpha T_1$ – объём газа при температуре $T_1 = 373$ К,

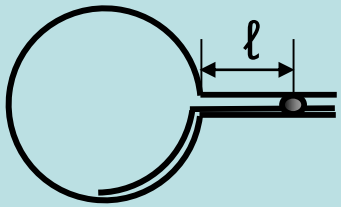
$\Delta V' = V - V'_o = V_o\alpha T - V_o\alpha T_1$ – изменение объёма газа при его нагревании до температуры T.

Вычислим "новый" температурный коэффициент объёмного расширения идеального газа:

$$\alpha' = \frac{V_o\alpha T - V_o\alpha T_1}{V_o\alpha T_1(T - T_1)} = \frac{V_o\alpha(T - T_1)}{V_o\alpha T_1(T - T_1)} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{373\,\text{K}}.$$

Ответ: α' = 1/373 К.

2. *Газовый термометр состоит из шара с припаянной к нему горизонтальной стеклянной трубкой (см. рис.). Капелька ртути, помещённая в трубку, отделяет объём шара от внешнего пространства. Площадь поперечного сечения трубки $S = 0{,}1$ см$^2$. При температуре $T_1 = 273$ К капелька находилась на расстоянии $\ell_1 = 30$ см от поверхности шара, при температуре $T_2 = 278$ К – на расстоянии $\ell_2 = 50$ см. Найти объём шара и зависимость $T(\ell)$. Давление считать постоянным.*



Решение. Пусть V – объём воздуха внутри шара (объём шара), $\Delta V = S\ell$ – объём воздуха внутри трубки до капельки ртути.

Запишем закон Гей-Люссака для состояний воздуха внутри шара и трубки при температуре $T_1$ и $T_2$:

$$\frac{V + S\ell_1}{V + S\ell_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow VT_2 + S\ell_1 T_2 = VT_1 + S\ell_2 T_1.$$

Определим отсюда объём V воздуха внутри шара (объём шара).

$$VT_2 - VT_1 = S\ell_2 T_1 - S\ell_1 T_2;\ V(T_2 - T_1) = S(\ell_2 T_1 - \ell_1 T_2);\ V = \frac{\ell_2 T_1 - \ell_1 T_2}{T_2 - T_1} S$$

Вычислим результат:

$$V = \frac{50\text{ см} \cdot 273\text{ К} - 30\text{ см} \cdot 278\text{ К}}{278\text{ К} - 273\text{ К}} \cdot 0{,}1\text{ см}^2 = 106{,}2\text{ см}^3 \approx 0{,}1\text{ л}.$$

Получим зависимость $T(\ell)$. Для этого запишем закон Гей-Люссака для состояний воздуха при температуре T, $T_1$ и $T_2$:

$$\frac{V + S\ell_1}{V + S\ell} = \frac{T_1}{T} \qquad \frac{V + S\ell_2}{V + S\ell} = \frac{T_2}{T}$$

Отсюда

$VT + S\ell_1T = VT_1 + S\ell T_1$ (1); $VT + S\ell_2T = VT_2 + S\ell T_2$ (2)

Вычтем (1) из (2):

$S\ell_2T - S\ell_1T = VT_2 - VT_1 + S\ell T_2 - S\ell T_1$;
$ST(\ell_2 - \ell_1) = V(T_2 - T_1) + S\ell(T_2 - T_1)$

Выражение для T принимает вид: $$T = \frac{T_2 - T_1}{S(\ell_2 - \ell_1)}V + \frac{T_2 - T_1}{\ell_2 - \ell_1}\ell$$

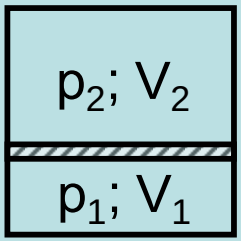
Используем выражение для объёма шара V:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{S(\ell_2 - \ell_1)} \cdot \frac{\ell_2 T_1 - \ell_1 T_2}{T_2 - T_1} S + \frac{T_2 - T_1}{\ell_2 - \ell_1}\ell$$

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\ell_2 - \ell_1}\ell + \frac{\ell_2 T_1 - \ell_1 T_2}{\ell_2 - \ell_1} = 25\ell + 265{,}5 -$$ зависимость $T(\ell)$.

В полученной зависимости $T(\ell)$ расстояние $\ell$ нужно измерять в метрах.

3. *В цилиндрическом сосуде с газом находится в равновесии тяжёлый поршень (см. рис.). Масса газа и температура под поршнем и над ним одинаковы. Отношение объёма над поршнем к объёму под поршнем равно 3. Каким будет это отношение, если температуру в сосуде увеличить в 2 раза?*




Решение. Запишем уравнение состояния газа под поршнем и над поршнем в начальном состоянии (при температуре $T_1 = T$):

$$\left(p_2 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{V}{4} = \frac{m_1}{\mu}RT,$$ где $p_1 = p_2 + Mg/S$ – давление газа под поршнем, $Mg/S$ – давление, создаваемое весом поршня массой M, $V/4$ – объём газа под поршнем, $m_1$ – масса газа под поршнем, T – температура газа, V – объём сосуда.

$$p_2\frac{3}{4}V = \frac{m_2}{\mu}RT,$$ где $p_2$ – давление газа над поршнем, $3V/4$ – объём газа над поршнем, $m_2$ – масса газа над поршнем, R = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, T – температура газа.

$m_1 = m_2$; $T_1 = T_2 = T$ – по условию, поэтому :

$$\left(p_2 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{V}{4} = p_2\frac{3V}{4};\ p_2 + \frac{Mg}{S} = 3p_2 \Rightarrow \frac{Mg}{S} = 2p_2.$$

Пусть при температуре 2T нижняя порция газа занимает объём $V_x$, верхняя $V - V_x = V(1 - k)$, где $k = V_x/V$.

Тогда

$$\left(p_2' + \frac{Mg}{S}\right)V_x = p_2'V(1-k);\left(p_2' + \frac{Mg}{S}\right)k = p_2'(1-k).$$

$$\left(p_2' + 2p_2\right)k = p_2'(1-k);\ kp_2' + 2p_2k = p_2'(1-k);\ 2p_2k = p_2'(1-2k).$$

$p_2' = \dfrac{2k}{1-2k}p_2$ –давление верхней порции газа после повышения температуры.

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для верхней порции газа до и после повышения температуры сосуда:

$$p_2\frac{3}{4}V=\frac{m_2}{\mu}RT;\quad p_2'(1-k)V=\frac{m_2}{\mu}R2T\Rightarrow 2p_2\cdot\frac{3}{4}V=p_2'(1-k)V$$

$$\frac{3}{2}p_2=p_2'(1-k)=\frac{2k}{1-2k}p_2(1-k);\ \frac{3}{2}=\frac{2k(1-k)}{1-2k}$$

$$3-6k=4k-4k^2;\quad 4k^2-10k+3=0.$$

Решим полученное квадратное относительно k уравнение:

$$k=\frac{10\pm\sqrt{100-48}}{8}=\frac{10\pm\sqrt{52}}{8}=\frac{5\cdot 2\pm 2\sqrt{13}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{4}.$$

Условию задачи (k < 1) удовлетворяет корень $k=\frac{5-\sqrt{13}}{4}$.

Тогда

$V_x=kV=\frac{5-\sqrt{13}}{4}V-$ объём нижней порции газа после повышения температуры.

$V-V_x=V(1-k)=V\left(1-\frac{5-\sqrt{13}}{4}\right)=\frac{\sqrt{13}-1}{4}V-$ объём верхней порции газа после повышения температуры.

$$\frac{V - V_x}{V_x} = \frac{\frac{\sqrt{13}-1}{4}}{\frac{5-\sqrt{13}}{4}} = \frac{\sqrt{13}-1}{5-\sqrt{13}} \approx 1{,}9$$ – отношение объёма газа над поршнем к объёму под поршнем после повышения температуры.

4. *Состояние идеального газа массой m изменяется в соответствии с законом $p^2/T = c$, где c – некоторая известная константа. Определить зависимость давления газа от его объёма в этом процессе. Молярная масса газа равна μ.*

Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона и получим из него выражение для температуры T:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow T = \frac{pV\mu}{mR}.$$

Тогда

$$\frac{p^2}{\frac{pV\mu}{mR}} = c; \quad \frac{mR}{\mu c}p = V; \quad p = \frac{\mu c}{mR}V$$ – зависимость давления газа от его объёма в этом процессе (прямо пропорциональная).

5. *Процесс в идеальном газе идёт так, что давление и объём связаны равенством $p\sqrt{V} = B$. Когда температура газа достигает значения T, процесс продолжается при другом характере зависимости давления от объёма: $p = -D/(V^2)$. Найти температуру T, считая константы B и D, а также количество молей газа известными.*

Решение. Пусть p и V – давление и объём газа соответственно при температуре T. Определим эти параметры через значения констант B и D:

Тогда

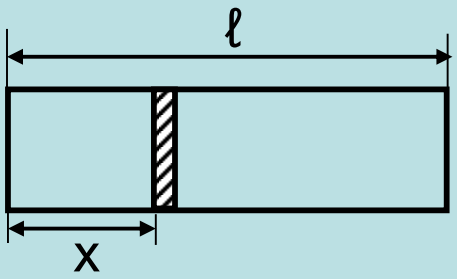
$$\begin{cases} p\sqrt{V} = B \\ pV^2 = -D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2V = B^2 \\ p^2V^4 = D^2 \end{cases} \Rightarrow V^3 = \frac{D^2}{B^2};\ V = \sqrt[3]{\frac{D^2}{B^2}} = \frac{D^{2/3}}{B^{2/3}};$$

$$p = \frac{B}{\sqrt{V}} = \frac{B}{\sqrt{\frac{D^{2/3}}{B^{2/3}}}} = \frac{B \cdot B^{1/3}}{D^{2/6}} = \frac{B^{4/3}}{D^{2/6}}$$

Запишем для состояния газа при температуре T уравнение Менделеева-Клапейрона и определим из него температуру T:

$$pV = \nu RT \Rightarrow T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{\frac{B^{4/3}}{D^{2/6}} \cdot \frac{D^{2/3}}{B^{2/3}}}{\nu R} = \frac{B^{2/3}\,|D|^{1/3}}{\nu R} = \frac{\sqrt[3]{B^2\,|D|}}{\nu R}$$ – температура газа.

6. *Цилиндрический сосуд длиной ℓ = 85 см разделён на две части легкоподвижным поршнем (см. рис.). При каком положении поршня давление в обеих частях цилиндра будет одинаково, если одна часть заполнена кислородом, а другая водородом такой же массы? Температура в обеих частях цилиндра одинакова.*




Решение. Будем считать, что в левой (по рисунку) части сосуда находится кислород, в правой – водород. Пусть S – площадь поперечного сечения сосуда.

Запишем для обеих порций газа уравнение Менделеева-Клапейрона и определим значения x и ℓ - x :

$$\begin{cases} pSx = \dfrac{m}{\mu_1}RT \\ pS(\ell - x) = \dfrac{m}{\mu_2}RT \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\ell - x} = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \ \mu_1 x = \ell\mu_2 - \mu_2 x; \quad \mu_1 x + \mu_2 x = \ell\mu_2$$

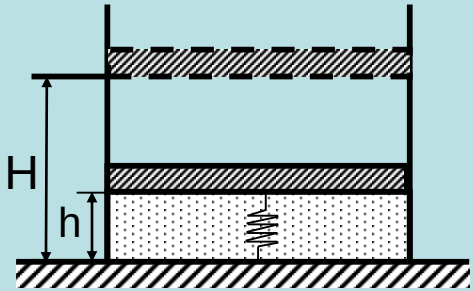
$$x(\mu_1 + \mu_2) = \ell\mu_2 \Rightarrow x = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\ell; \quad \ell - x = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\ell$$

Вычислим результат:

$$x = \frac{0{,}002\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}}{0{,}002\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}} + 0{,}032\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}} \cdot 85\,\text{см} = 5\,\text{см};$$

$$\ell - x = \frac{0{,}032\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}}{0{,}002\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}} + 0{,}032\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}} \cdot 85\,\text{см} = 80\,\text{см}.$$

7. *В вертикально расположенном цилиндре находится газ массой m = 0,01 кг. Он отделён от атмосферы поршнем, соединённым с дном пружиной жёсткостью k = 20 Н/м (см. рис.). При температуре $T_1$ = 290 К поршень расположен на расстоянии h = 0,2 м от дна цилиндра. До какой температуры $T_2$ надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты H = 0,5 м? Молярная масса газа μ = 0,029 кг/моль.*




Решение. В начальном и конечном состояниях газ под поршнем находится под давлением, созданным атмосферой, поршнем и растянутой пружиной:

$p_1 = (Mg/S) + p_o + (kh/S)$, где M – масса поршня, S – площадь поперечного сечения сосуда, $p_o$ – атмосферное давление, k – жёсткость пружины

Запишем для начального и конечного состояния газа под поршнем уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$\left(p_o + \frac{Mg}{S} + \frac{kh}{S}\right)Sh = \frac{m}{\mu}RT_1$$

$$\left(p_o + \frac{Mg}{S} + \frac{kH}{S}\right)SH = \frac{m}{\mu}RT_2$$

Разделим левые и правые части двух полученных уравнений друг на друга соответственно:

$$\frac{\left(p_o + \frac{Mg}{S} + \frac{kH}{S}\right)SH}{\left(p_o + \frac{Mg}{S} + \frac{kh}{S}\right)Sh} = \frac{\frac{m}{\mu}RT_2}{\frac{m}{\mu}RT_1} \Rightarrow \frac{p_o + \frac{Mg}{S} + \frac{kH}{S}}{p_o + \frac{Mg}{S} + \frac{kh}{S}} \cdot \frac{H}{h} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона для начального состояния газа получим:

$$p_o + \frac{Mg}{S} = \frac{m}{\mu Sh}RT_1 - \frac{kh}{S}$$

Тогда

$$\frac{\frac{m}{\mu Sh}RT_1 - \frac{kh}{S} + \frac{kH}{S}}{\frac{m}{\mu Sh}RT_1} \cdot \frac{H}{h} = \frac{T_2}{T_1}; \quad \frac{\frac{m}{\mu h}RT_1 + k(H-h)}{\frac{m}{\mu h}RT_1} \cdot \frac{H}{h} = \frac{T_2}{T_1}$$

Отсюда

$$T_2 = \left(1 + \frac{k(H-h)}{\frac{m}{\mu h} RT_1}\right)\frac{H}{h}T_1 = \frac{H}{h}T_1 + \frac{k\mu(H-h)H}{mR}.$$

Вычислим результат:

$$T_2 = \frac{0{,}5\,\text{м}}{0{,}2\,\text{м}} \cdot 290\,\text{К} + \frac{20\,\text{Н/м} \cdot 0{,}029\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}(0{,}5\,\text{м} - 0{,}2\,\text{м})}{0{,}01\,\text{кг} \cdot 8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}} \cdot 0{,}5\,\text{м} = 726\,\text{К}.$$

8. *Космический аппарат представляет собой жёсткую тонкостенную сферу радиусом R = 2 м, наполненную газом. Внутри аппарата находится шар радиусом r = R/2, наполненный таким же газом, но при бóльшем давлении. Шар касается внутренней поверхности аппарата. В результате повреждения шар лопнул. Найти, во сколько раз изменилось давление внутри аппарата, если оказалось, что весь аппарат сместился при этом на расстояние ℓ = 0,5 м. Массой оболочек пренебречь. Температуру считать неизменной.*

Решение. Пусть $m_1$ – масса газа внутри космического аппарата, $m_2$ – масса газа внутри шара.

Определим положение центра масс газа внутри аппарата. Для этого заполним шар газом такой же плотности и при таком же давлении, что и у газа в аппарате.

Определим объём $V_1$ газа внутри аппарата.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 -$ объём всего космического аппарата.

$V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 -$ объём шара радиуса r = R/2.

$$V_1 = V - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{7}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{7}{8}V.$$

Тогда

$\rho = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_1}{\frac{7}{8}V} = \frac{8}{7}\cdot\frac{m_1}{V} -$ плотность газа внутри аппарата.

$$M = \rho V = \frac{8}{7} \cdot \frac{m_1}{V} \cdot V = \frac{8}{7} m_1 -$$ масса газа внутри всего аппарата.

Центр масс газа внутри всего аппарата совпадает с его геометрическим центром, т.е. справедливо равенство:

$$m_1 x = (M - m_1)\frac{R}{2},$$ где x – расстояние от центра масс газа в объёме $V_1$ до центра шара радиуса R, M – $m_1$ – масса газа плотностью ρ в шаре объёмом $V_2$, R/2 – расстояние от центра шара радиусом R до центра шара радиусом R/2.

Отсюда

$$m_1 x = (\frac{8}{7} m_1 - m_1)\frac{R}{2} = \frac{1}{7} m_1 \frac{R}{2} \Rightarrow x = \frac{R}{14}.$$

Определим отношение масс $m_1$ и $m_2$. Для этого воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона для каждой порции газа в отдельности.

$$\begin{cases} p_1 V_1 = \dfrac{m_1}{\mu} RT \\ p_2 V_2 = \dfrac{m_2}{\mu} RT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{p_1 V_1 \mu}{RT} \\ m_2 = \dfrac{p_2 V_2 \mu}{RT} \end{cases} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{V_1}{V_2}.$$

$p_1$ – давление газа внутри аппарата, $p_2$ – давление газа внутри шара.

Раскроем полученное выражение подробней.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\frac{7}{8} V}{\frac{1}{8} V} = 7 \frac{p_1}{p_2}.$$

После выпуска порции газа массой $m_2$ из шара центры масс обеих порций совпадают с центром аппарата. Центры масс обеих порций сместились к геометрическому центру аппарата в противоположные стороны: порция газа массой $m_1$ – на x, порция газа массой $m_2$ – на R/2. Будем считать, что весь аппарат сместился при этом на $\ell$ в направлении смещения порции газа массой $m_1$.

Силы, действующие внутри космического аппарата, являются для данной системы тел внутренними. В этом случае положение центра масс всей системы относительно некоторой неподвижной системы отсчёта остаётся неизменным. Перемещения центров масс каждой порции газа относительно этой системы отсчёта удовлетворяют (как следствие закона сохранения импульса) соотношению:

$$m_1(x+\ell)+m_2\left(-\frac{R}{2}+\ell\right)=0$$

Преобразуем полученное выражение:

$$m_1(x+\ell)=m_2\left(\frac{R}{2}-\ell\right);\quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{\frac{R}{2}-\ell}{x+\ell}=\frac{\frac{R}{2}-\ell}{\frac{R}{14}+\ell}=7\frac{R-2\ell}{R+14\ell}$$

Тогда

$$\frac{m_1}{m_2}=7\frac{p_1}{p_2}=7\frac{R-2\ell}{R+14\ell}\Rightarrow\frac{p_1}{p_2}=\frac{R-2\ell}{R+14\ell}$$

Определим давления $p'_1$ и $p'_2$ каждой порции газа в конечном состоянии (считаем температуру системы неизменной):

$$\begin{cases} p_1V_1 = p'_1V \\ p_2V_2 = p'_2V \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} p'_1 = \dfrac{p_1V_1}{V} = \dfrac{7}{8}p_1 \\ p'_2 = \dfrac{p_2V_2}{V} = \dfrac{1}{8}p_2 \end{array}$$

Давление газа внутри космического аппарата в конечном состоянии равно (в соответствии с законом Дальтона) сумме парциальных давлений обеих порций: $p = p'_1 + p'_2$.

$$p = \frac{7}{8}p_1 + \frac{1}{8}p_2 = \frac{1}{8}p_2\left(7\frac{p_1}{p_2} + 1\right).$$

Тогда

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{1}{8}p_2\left(7\frac{p_1}{p_2} + 1\right)}{p_1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{7\frac{p_1}{p_2} + 1}{\frac{p_1}{p_2}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{7\frac{R - 2\ell}{R + 14\ell} + 1}{\frac{R - 2\ell}{R + 14\ell}} = \frac{R}{R - 2\ell}.$$

Вычислим результат: $\frac{p}{p_1} = \frac{2\,м}{2\,м - 2 \cdot 0{,}5\,м} = 2$

Ответ: давление газа внутри космического аппарата увеличится в два раза.

9. *В колбе находится двухатомный газ. Под действием ультрафиолетового излучения распалось на атомы α = 12% молекул. При этом в колбе установилось давление p = 93 кПа. Найти давление газа в недиссоциированном состоянии.*

Решение. Пусть $p_o$ – давление двухатомного газа в недиссоциированном состоянии, n – концентрация молекул газа в этом состоянии.

Тогда

$p_o = nkT$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

$p_1 = (2\alpha)nkT$ – парциальное давление одноатомного газа после диссоциации двухатомного газа.

$p_2 = (1 - \alpha)nkT$ – парциальное давление оставшегося после диссоциации двухатомного газа .

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2 = (2\alpha + 1 - \alpha)nkT = (1 + \alpha)nkT$.

Отсюда $p_o = nkT = p/(1 + \alpha)$ – давление газа в недиссоциированном состоянии.

Вычислим результат: $p_o = 93$ кПа/(1 + 0,12) = 83 кПа.

10. *На дне сосуда, заполненного воздухом, лежит полый стальной шарик радиусом r = 2 см и массой m = 5 г. До какого давления p нужно сжать воздух в сосуде, чтобы шарик поднялся вверх? Температура постоянна и равна $t^o = 20^oC$.*

Решение. Для поднятия шарика необходимо, чтобы действующая на него сила тяжести была компенсирована выталкивающей силой со стороны воздуха:

$mg = F_A = \rho gV$, где $\rho$ – плотность воздуха, необходимая для поднятия шарика, $V = 4\pi r^3/3$ – объём стального шарика.

Отсюда $m = \rho 4\pi r^3/3$; $\rho = 3m/(4\pi r^3)$.

Искомую плотность воздуха $\rho$ определим из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V}\cdot\frac{RT}{\mu} = \rho\frac{RT}{\mu} \Rightarrow \rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Приравняем два выражения для плотности воздуха и определим искомое давление p:

$$\frac{p\mu}{RT} = \frac{3m}{4\pi r^3} \Rightarrow p = \frac{3mRT}{4\pi\mu r^3}.$$

Вычислим результат:

$$p = \frac{3\cdot 0{,}005\text{кг}\cdot 8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\cdot 293\text{К}}{4\pi\cdot 0{,}029\frac{\text{кг}}{\text{моль}}(0{,}02\text{м})^3} = 12527432\ \text{Па} \approx 125{,}3\ \text{атм}.$$

11. *В сосуде находится озон ($O_3$) при температуре $t^o_1$ = = 527$^o$C. Через некоторое время он полностью превратился в кислород ($O_2$), а температура упала до $t^o_2$ = 127$^o$C. На сколько процентов изменилось давление в сосуде?*

Решение. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для двух состояний кислорода и определим его давление в конечном состоянии:

$$\begin{cases} p_1 V = \dfrac{m}{\mu_1} R T_1 \\ p_2 V = \dfrac{m}{\mu_2} R T_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{p_1 V}{p_2 V} = \frac{\dfrac{m}{\mu_1} R T_1}{\dfrac{m}{\mu_2} R T_2}; \ \frac{p_1}{p_2} = \frac{\mu_2 T_1}{\mu_1 T_2} \Rightarrow p_2 = \frac{\mu_1 T_2}{\mu_2 T_1} p_1.$$

Тогда

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\mu_1 T_2}{\mu_2 T_1} p_1 - p_1 = p_1 \left( \frac{\mu_1 T_2}{\mu_2 T_1} - 1 \right) = -p_1 \left( 1 - \frac{\mu_1 T_2}{\mu_2 T_1} \right) -$$ абсолютное изменение давления кислорода в сосуде.

$$\frac{\Delta p}{p_1} = -\left( 1 - \frac{\mu_1 T_2}{\mu_2 T_1} \right) -$$ относительное изменение давления кислорода в сосуде.

Вычислим результат:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = -\left(1 - \frac{0{,}048\text{кг / моль} \cdot 400\text{К}}{0{,}032\text{кг / моль}\mu_2 \cdot 800\text{К}}\right) = -0{,}25 = -25\%.$$

Ответ: давление кислорода уменьшилось на 25%.

12. *Идеальный газ расширяется по закону $pV^2$ = const и его объём увеличивается в три раза. Найти первоначальную температуру газа $T_1$, если после расширения его температура равна $T_2$ = 100 К.*

Дано: $T_2$ = 100 К; $V_2/V_1$ = 3

$T_1$ - ?

Решение. Запишем закон расширения газа для двух его состояний:

$$\begin{cases} p_1 V_1^2 = \text{const} \\ p_2 V_2^2 = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{V_1^2}{V_2^2} = 1; \ \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2.$$

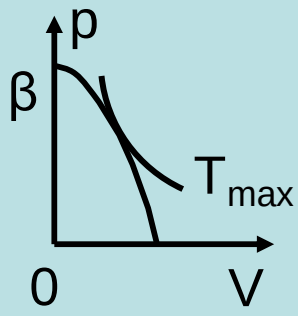
Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона для двух состояний газа и получим соотношение между температурой $T_1$ и $T_2$:

$$\begin{cases} p_1V_1 = \dfrac{m}{\mu}RT_1 \\ p_2V_2 = \dfrac{m}{\mu}RT_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2};\ \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2};\ \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow T_1 = \frac{V_2}{V_1}T_2 = 3T_2.$$

Ответ: $T_1 = 3T_2 = 300$ К – начальная температура газа.

13. *$\nu$ молей идеального газа бесконечно медленно переводят из состояния 1 в состояние 2 по закону: $p = -\alpha V^2 + \beta$, где $\alpha$ и $\beta$ – некоторые известные положительные постоянные. Какой наибольшей температуры может достичь газ в таком процессе?*

Решение. Графиком зависимости давления газа от его объёма, представленной в условии задачи, является парабола, ветви которой направлены вниз, а осью симметрии является ось p (см. рис.).




Каждой точке графика зависимости p(V) соответствует определённая температура, так как давление газа, его объём и температура связаны уравнением Менделеева-Клапейрона.

Максимальной температуре газа $T_m$ в процессе 1 – 2 соответствует изотерма, занимающая наивысшее положение из возможных (см. рис.). При этом обе кривые (парабола и изотерма) в точке касания имеют общую касательную. Координаты $p_o$ и $V_o$ точки касания кривых определяют значение максимальной температуры газа $T_m$ в процессе 1 – 2. Определим значение $T_m$ аналитически.

Для этого выразим давление газа из уравнения Менделеева-Клапейрона и подставим в зависимость p(V):

$$pV = \nu RT \Rightarrow p = \frac{\nu RT}{V}; \quad \frac{\nu RT}{V} = -\alpha V^2 + \beta.$$

Отсюда

$$T(V) = -\frac{\alpha}{\nu R}V^3 + \frac{\beta}{\nu R}V -$$ зависимость температуры газа от объёма.

Возьмём производную от температуры газа по объёму:

$$T' = \left(-\frac{\alpha}{\nu R}V^3 + \frac{\beta}{\nu R}V\right)' = -\frac{3\alpha}{\nu R}V^2 + \frac{\beta}{\nu R}.$$

В точке экстремума производная T' равна нулю:

$$-\frac{3\alpha}{\nu R}V_o^2 + \frac{\beta}{\nu R} = 0.$$

Отсюда

$$-3\alpha V_o^2+\beta=0;\ 3\alpha V_o^2=\beta;\ V_o^2=\frac{\beta}{3\alpha};\ V_o=\sqrt{\frac{\beta}{3\alpha}}.$$

Подставим найденное значение $V_o$ в зависимость T(V) и получим значение максимальной температуры газа в процессе 1 – 2 :

$$T_m=-\frac{\alpha\beta}{3\alpha\nu R}\sqrt{\frac{\beta}{3\alpha}}+\frac{\beta}{\nu R}\sqrt{\frac{\beta}{3\alpha}}=-\frac{\beta}{3\nu R}\sqrt{\frac{\beta}{3\alpha}}+\frac{\beta}{\nu R}\sqrt{\frac{\beta}{3\alpha}}=\frac{2\beta}{3\nu R}\sqrt{\frac{\beta}{3\alpha}}.$$

14. *Определить наименьшее давление идеального газа в процессе, протекающем по закону $T = T_o + \alpha V^2$, где $T_o$ и $\alpha$ – положительные постоянные. Каковы температура и объём газа при этом давлении?*

Решение. Из уравнения Менделеева-Клапейрона выразим температуру газа и подставим в зависимость T(V):

$$pV=\nu RT\Rightarrow T=\frac{pV}{\nu R};\ \frac{pV}{\nu R}=T_o+\alpha V^2.$$

Получено квадратное уравнение относительно объёма газа V:

$$\alpha V^2 - \frac{p}{\nu R} V + T_o = 0.$$

Квадратное уравнение имеет действительные корни при условии неотрицательных значений его дискриминанта:

$$\left(-\frac{p}{\nu R}\right)^2 - 4\alpha T_o \geq 0.; \left(-\frac{p}{\nu R}\right)^2 \geq 4\alpha T_o; \quad \frac{p^2}{\nu^2 R^2} \geq 4\alpha T_o; \; p^2 \geq 4\alpha \nu^2 R^2 T_o$$

Отсюда

$p \geq \sqrt{4\alpha\nu^2 R^2 T_o} = 2\nu R\sqrt{\alpha T_o}$; $p_{min} = 2\nu R\sqrt{\alpha T_o}$ – наименьшее давление газа в указанном процессе.

Определим объём газа $V_o$ при наименьшем давлении $p_{min}$. Для этого найдём единственный корень квадратного (относительно объёма V) уравнения (дискриминант этого уравнения при $p = p_{min}$ равен нулю).

$$V_o = \frac{\frac{p_{min}}{\nu R}}{2\alpha} = \frac{p_{min}}{2\alpha\nu R} = \frac{2\nu R\sqrt{\alpha T_o}}{2\alpha\nu R} = \sqrt{\frac{T_o}{\alpha}}.$$

Определим температуру T', при которой объём газа принимает значение $V_o$. Для этого значения $p_{min}$ и $V_o$ подставим в выражение для T:

$$T' = \frac{p_{min} V_o}{\nu R} = \frac{2\nu R\sqrt{\alpha T_o}\sqrt{\frac{T_o}{\alpha}}}{\nu R} = 2T_o.$$

15. *Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $p = b/V^n$, где b и n – некоторые постоянные, причём $0 < n < 1$?*

Решение. Из уравнения Менделеева-Клапейрона получим выражение для температуры газа и подставим в это выражение значение давления p:

$$pV = \nu RT \Rightarrow T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{\frac{b}{V^n}V}{\nu R} = \frac{b}{\nu R}V^{1-n}.$$

При условии $0 < n < 1$ показатель степени $1 - n$ принимает значения $0 < 1 - n < 1$, а функция $V^{1-n}$ является возрастающей. Это значит, что с ростом объёма газа V его температура T также увеличивается, т.е. газ нагревается.