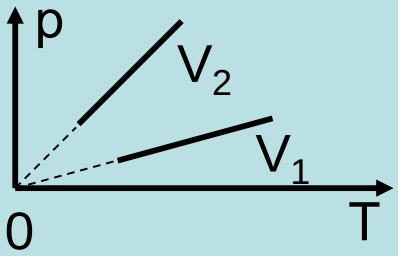
Глава III.5

Решение графических задач

1. *Какой изохоре (см. рис.) соответствует бóльший объём? Масса газа в обоих случаях одинакова.*



Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона и получим зависимость давления газа от его температуры:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{mR}{\mu V}T = cT,$$ где $c = mR/(\mu V)$ – некоторая постоянная величина (константа).

Таким образом, зависимость давления идеального газа от температуры носит линейный характер.

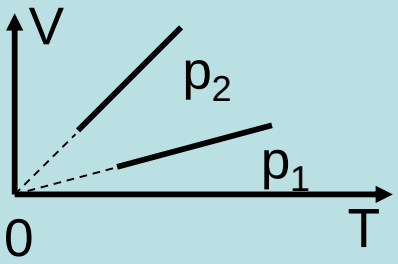
Из курса математики известно, что угловой коэффициент c в зависимости $p = cT$ численно равен тангенсу угла наклона графика к оси T, т.е. бóльшему значению константы c соответствует бóльший угол наклона графика к оси T и наоборот.

Из графиков, представленных на рисунке, видно, что мéньший угол наклона графика зависимости $p = p(T)$ имеет изохо-

ра с объёмом V_1, т.е. константа с в зависимости p = p(T) для нижнего графика имеет ме́ньшее значение.

Объём газа V в выражении для с находится в знаменателе. Это значит, что $V_1 > V_2$, т.е. нижней изохоре соответствует бо́льший объём.

2. *Какой изобаре (см. рис.) соответствует бо́льшее давление? Масса газа в обоих случаях одинакова.*



Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона и получим зависимость объёма газа от его температуры:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow V = \frac{mR}{\mu p}T = cT,$$ где c = mR/(μp) - некоторая постоянная величина (константа).

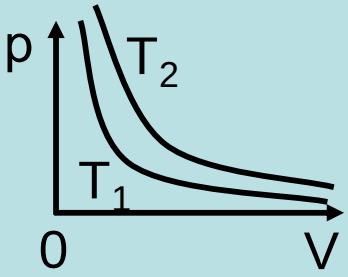
Таким образом, зависимость объёма идеального газа от температуры носит линейный характер.

Из курса математики известно, что угловой коэффициент с в зависимости V = cT численно равен тангенсу угла наклона графика к оси T, т.е. бо́льшему значению константы с соответствует бо́льший угол наклона графика к оси T и наоборот.

Из графиков, представленных на рисунке, видно, что ме́ньший угол наклона графика зависимости V = V(T) имеет изобара с давлением p_1, т.е. константа c в зависимости V = V(T) для нижнего графика имеет ме́ньшее значение.

Давление газа p в выражении для c находится в знаменателе. Это значит, что $p_1 > p_2$, т.е. нижней изобаре соответствует бо́льшее давление.

3. *Какой изотерме (см. рис.) соответствует бо́льшая температура? Масса газа в обоих случаях одинакова.*



Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона и получим зависимость давления газа от его объёма:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{\frac{m}{\mu}RT}{V} = \frac{c}{V}, \text{где } c = \frac{m}{\mu}RT -$$ некоторая постоянная величина (константа).

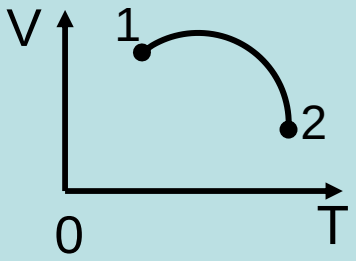
Зависимость давления p газа от занимаемого им объёма V является обратно пропорциональной.

Из курса математики известно, что графиком обратно пропорциональной зависимости является гипербола, положение которой относительно осей координат определяется значением постоянной с. Чем бóльшее значение имеет константа с, тем выше расположена гипербола.

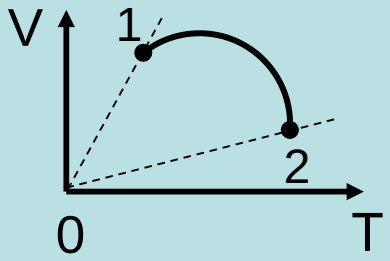
В физике кривая на плоскости p,V, выражающая зависимость p = p(V), называется изотермой. Значение константы с в этой зависимости определяется температурой T, т.е. чем больше T, тем больше с и тем выше должна быть расположена изотерма на плоскости p,V.

На рисунке представлены две изотермы. Изотерма, соответствующая температуре T_2, расположена выше. Это значит, что температура T_2 больше температуры T_1, т.е. $T_2 > T_1$.

4. *Идеальный газ переведён из состояния 1 в состояние 2. Увеличивалось или уменьшалось давление газа данной массы в течение процесса 1 – 2?*



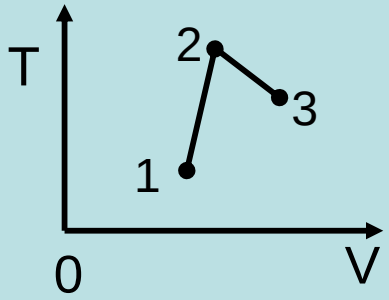
Решение. Процесс с газом, изображённый на рисунке, не является изопроцессом.



Проведём через точки 1 и 2 две изобары (см. рис.). Как было показано в решении задачи 2, изобара, которая наклонена к оси T под меньшим углом, имеет бóльшее значение давления, т.е. $p_2 > p_1$.

Таким образом, в процессе 1 – 2 давление газа увеличивалось.

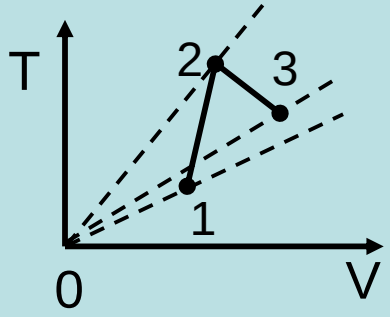
5. *Определить, как изменялось давление данной массы идеального газа в процессе 1 – 2 – 3 (см. рис.)?*



Решение. Процесс с газом, изображённый на рисунке, не является изопроцессом.

Проведём через точки 1, 2 и 3 изобары. Как было показано в решении задачи 2, изобара, которая наклонена к оси T под меньшим углом, имеет бóльшее значение давления.

Из рисунка следует, что наибольший угол наклона к оси T имеет изобара, проходящая через точку 1. Это значит, что давление p_1 – наименьшее из давлений p_1, p_2 и p_3.



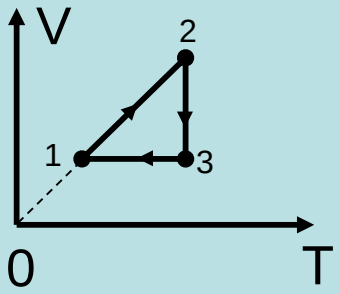
Наименьший угол наклона к оси T имеет изобара, проходящая через точку 2. Это значит, что давление p_2 – наибóльшее из давлений p_1, p_2 и p_3.

Таким образом, на участке 1 – 2 давление идеального газа увеличивалось, на участке 2 – 3 – уменьшалось.

Запишем соотношение между давлениями p_1, p_2 и p_3:

$$p_2 > p_3 > p_1.$$

6. *Построить графики процесса, происходящего с идеальным газом (см. рис.), в координатах p, T и p, V. Масса газа неизменна.*



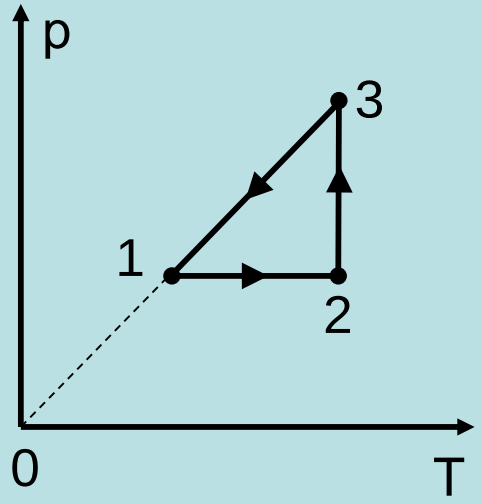
Решение. Опишем изменение состояния идеального газа на каждом участке процесса в отдельности.

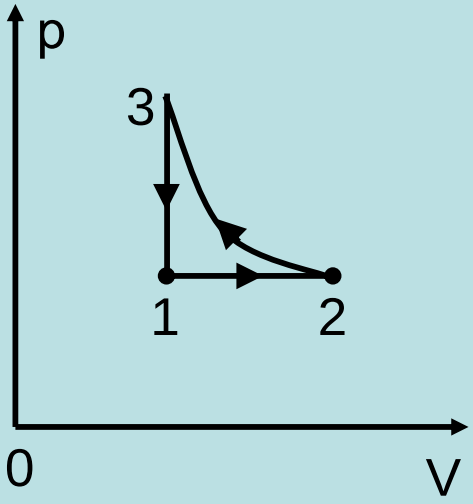
Участок 1 – 2 – изобарическое расширение газа (объём и температура газа на этом участке увеличиваются).

Участок 2 – 3 – изотермическое сжатие газа (объём газа уменьшается, давление (в соответствии с законом Бойля-Мариотта) увеличивается, температура газа остаётся неизменной).

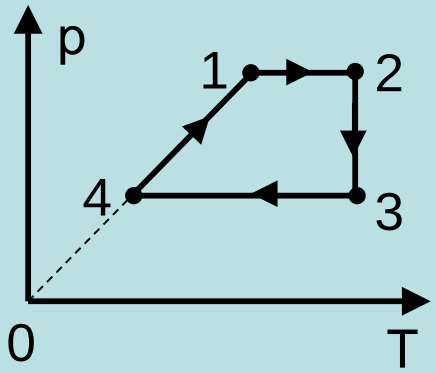
Участок 3 – 1 – изохорическое охлаждение газа (объём газа остаётся неизменным, температура газа уменьшается, давление газа (в соответствии с законом Шарля) уменьшается).

Построим графики процесса 1 – 2 – 3 – 1 в координатах p, T и p, V.





7. *Построить графики процесса, происходящего с идеальным газом (см. рис.), в координатах p, V и V, T.*



Решение. Опишем изменение состояния идеального газа на каждом участке процесса в отдельности.

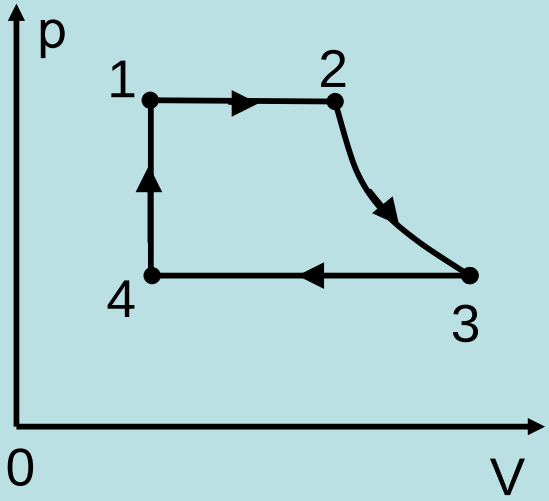
Участок 1 – 2 – изобарическое нагревание газа (при этом температура газа увеличивается; объём газа (в соответствии с законом Гей-Люссака) также увеличивается).

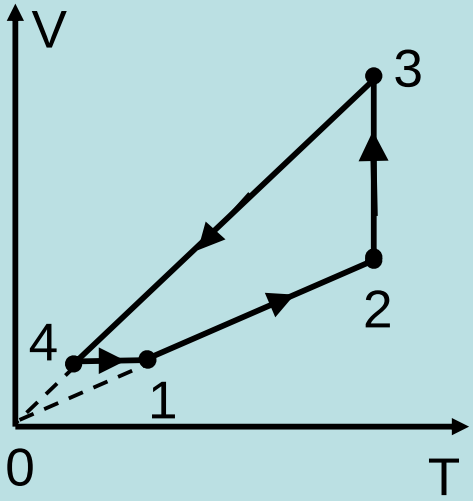
Участок 2 – 3 – изотермическое расширение газа (давление газа уменьшается, объём (в соответствии с законом Бойля-Мариотта) увеличивается, температура газа остаётся неизменной).

Участок 3 – 4 – изобарическое охлаждение газа (температура газа уменьшается, объём газа (в соответствии с законом Гей-Люссака) уменьшается, давление газа остаётся неизменным).

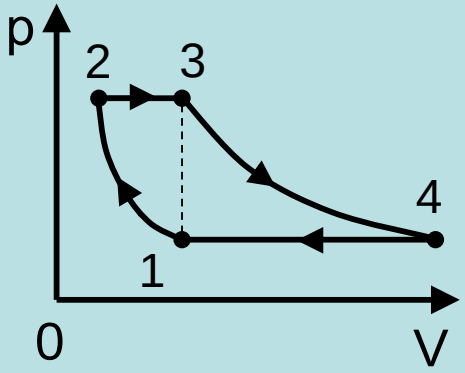
Участок 4 – 1 – изохорическое нагревание газа (объём газа остаётся неизменным, температура и давление газа увеличиваются).

Построим графики процесса 1 – 2 – 3 – 4 – 1 в координатах p, V и V, T.





8. *Построить графики процесса, происходящего с идеальным газом (см. рис.), в координатах p, T и V, T. Масса газа неизменна. Участки графика 1 – 2 и 3 – 4 соответствуют изотермическим процессам.*



Решение. Опишем изменение состояния идеального газа на каждом участке процесса в отдельности.

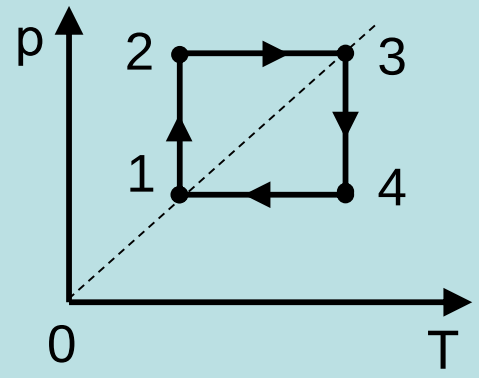
Участок 1 – 2 – изотермическое сжатие газа (при этом температура газа остаётся неизменной; объём газа уменьшается, давление – увеличивается.

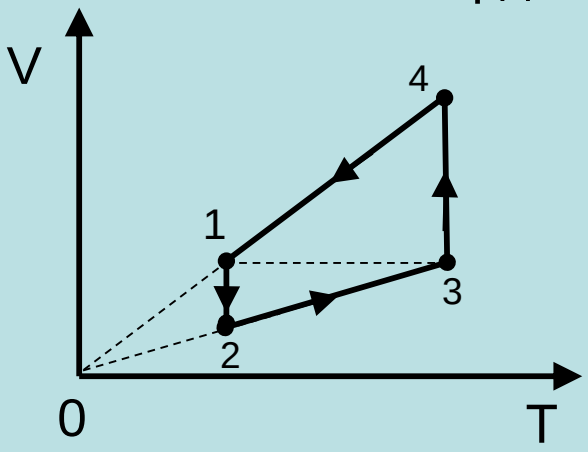
Участок 2 – 3 – изобарическое расширение газа (давление газа остаётся неизменным, объём газа увеличивается, температура (в соответствии с законом Гей-Люссака) увеличивается).

Участок 3 – 4 – изотермическое расширение газа (объём газа увеличивается, его давление – уменьшается, температура остаётся неизменной).

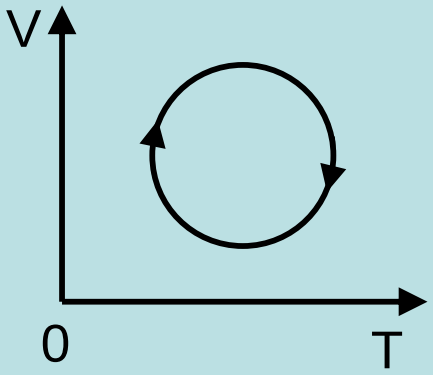
Участок 4 – 1 – изобарическое сжатие газа (объём газа уменьшается, температура (в соответствии с законом Гей-Люссака) уменьшается, давление остаётся неизменным).

Построим графики процесса 1 – 2 – 3 – 4 – 1 в координатах p, T и V, T.

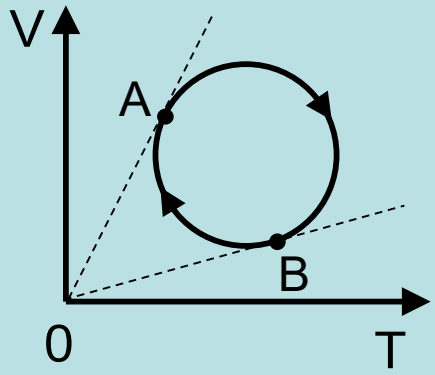




9. *Как менялось давление идеального газа в ходе процесса, график которого изображён на рисунке? Указать точки на графике, соответствующие наибольшему и наименьшему давлению.*



Решение. Из начала координатной плоскости проведём две изобары, которые являются касательными к окружности, изображённой на рисунке.



Изобара, наклонённая к оси T под ме́ньшим углом, имеет бо́льшее давление и наоборот.

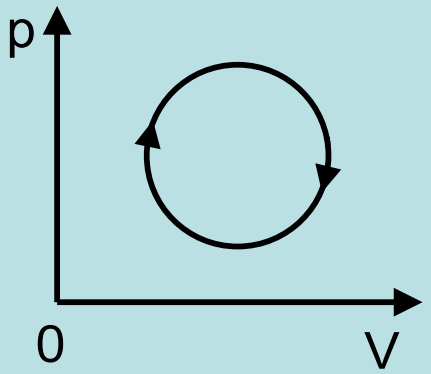
Это значит, что из всех изобар, которые можно провести через точки на окружности, изобара, проходящая через точку B, имеет наибольшее давление.

Из всех изобар, которые можно провести через точки на окружности, изобара, проходящая через точку A, имеет наиме́ньшее давление.

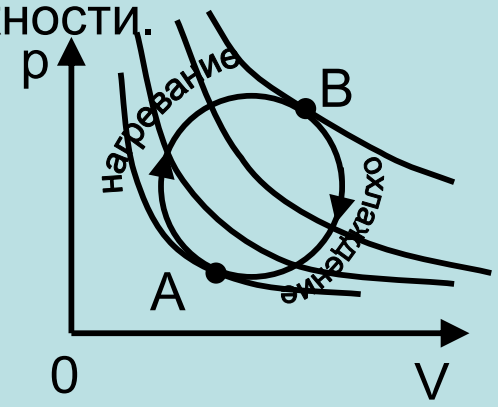
Таким образом, на участке AB графика процесса (окружности) давление идеального газа возрастало, на участке BA – убывало.

Точка В на графике процесса соответствует максимальному давлению, точка А – минимальному.

10. *Как менялась температура идеального газа в ходе процесса, график которого изображён на рисунке? Указать точки на графике, соответствующие максимальной и минимальной температуре.*



Решение. Проведём несколько изотерм, пересекающих изображённую на рисунке окружность, две из которых (проходящие через точки А и В) являются касательными к окружности.

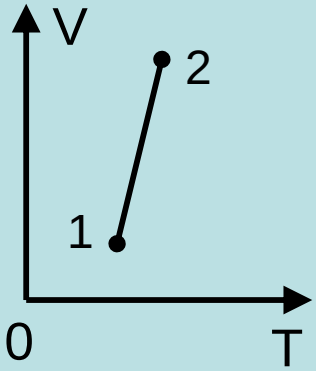


Как было показано в решении задачи 3, выше расположена изотерма с бóльшим значением температуры и наоборот.

Это значит, что на участке АВ графика идеальный газ нагревался, на участке ВА – охлаждался.

Точка А на графике соответствует состоянию газа с минимальной температурой, точка В – состоянию с максимальной температурой.

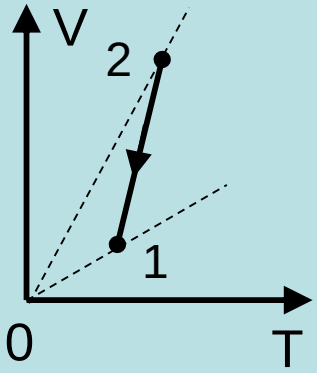
11. *Поршень в цилиндре с газом неплотно прилегает к стенке и пропускает газ наружу. На рисунке показана зависимость объёма газа от температуры при изобарном процессе. Указать направление процесса.*



Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона и получим зависимость объёма газа от его температуры:

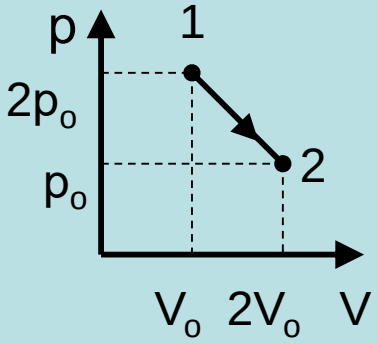
$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow V = \frac{mR}{\mu p}T = cT,$$ где $c = mR/(\mu p)$ – коэффициент пропорциональности (угловой коэффициент).

Коэффициент пропорциональности c в зависимости V = V(T) не является постоянной величиной: он убывает с уменьшением массы газа и возрастает с увеличением массы газа (при неизменном давлении).



Проведём прямые через точки 1 и 2 графика. Под бóльшим углом к оси T наклонена прямая, проходящая через точку 2. Это значит, что $c_2 > c_1$ и $m_2 > m_1$. Процесс в газе шёл в направлении 2 – 1.

12. *Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 (см. рис.). Найти максимальную температуру T_{max} газа в ходе процесса.*



Решение. Давление газа в указанном процессе линейно изменяется с изменением объёма, т.е. $p = -\alpha V + b$, где α и b – некоторые константы (угловой коэффициент отрицателен по знаку).

Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона и выразим из него давление газа:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{mRT}{\mu V}.$$

Тогда $\dfrac{mRT}{\mu V} = -\alpha V + b;\ T = \dfrac{\mu V}{mR}\left(-\alpha V + b\right) = -\dfrac{\mu\alpha}{mR}V^2 + \dfrac{\mu b}{mR}V$

Выделим в полученном выражении полный квадрат:

$$T = -\frac{\mu\alpha}{mR}\left(V^2 - 2\frac{b}{2\alpha}V + \left(\frac{b}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\alpha}\right)^2\right) = -\frac{\mu\alpha}{mR}\left(V - \frac{b}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\mu b^2}{4\alpha mR}$$

Получено уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, а вершина имеет координаты:

$$V_o = \frac{b}{2\alpha};\ T_{max} = \frac{\mu b^2}{4\alpha mR}$$

Определим значения постоянных α и b. Для этого запишем выражения для давления газа в состояниях 1 и 2:

$$p_1 = -\alpha V_1 + b;\ p_2 = -\alpha V_2 + b.$$

Отсюда

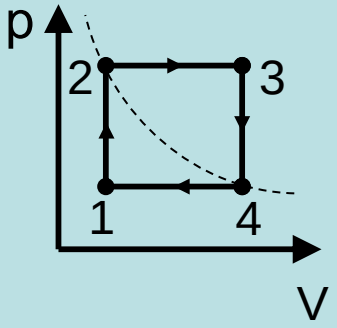
$$p_1 - p_2 = -\alpha V_1 + \alpha V_2 = \alpha(V_2 - V_1);\ \alpha = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1} = \frac{2p_o - p_o}{2V_o - V_o} = \frac{p_o}{V_o}.$$

$$b = p_1 + \alpha V_1 = 2p_o + \frac{p_o}{V_o} \cdot V_o = 3p_o.$$

Тогда

$$T_{max} = \frac{\mu b^2}{4\alpha mR} = \frac{b^2}{\frac{m}{\mu} 4\alpha R} = \frac{b^2}{\nu 4\alpha R} = \frac{9p_o^2}{\nu 4 \cdot \frac{p_o}{V_o} \cdot R} = \frac{9p_o V_o}{4\nu R}$$ – максимальная температура газа в процессе 1 – 2 ($\nu = 1$ моль).

13. *Какова температура идеального газа в состоянии 2 (см. рис.), если состояния 2 и 4 лежат на одной изотерме? Температуры T_1 и T_3 в состояниях 1 и 3 считать заданными.*



Дано: T_1; T_3; $T_2 = T_4$

T_2 – ?

Решение. Рассмотрим две пары состояний газа: 1 и 2; 3 и 4.

Участок 1 – 2 – изохорическое нагревание. В соответствии с законом Шарля:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Участок 3 – 4 – изохорическое охлаждение. В соответствии с законом Шарля:

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{T_3}{T_4}.$$

Из графика процесса следует: $p_2 = p_3$; $p_1 = p_4$

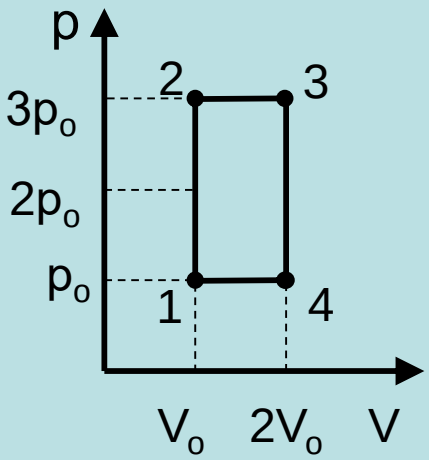
Тогда левые (а, значит, и правые) части обоих соотношений равны друг другу:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}.$$

Отсюда $T_2 T_4 = T_1 T_3$.

$T_2 = T_4$ – по условию, поэтому $T_2^2 = T_1 T_3$; $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$ – температура газа в состояниях 2 и 4.

14. *Изменение состояния идеального газа постоянной массы изображено на рисунке. В точке 1 температура газа T_o. Определить температуру газа в точках 2, 3, 4.*



Решение. Участок 1 – 2 – изохорическое нагревание газа. В соответствии с законом Шарля

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}; \ \frac{3p_o}{p_o} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 3; \ T_2 = 3T_1 = 3T_o -$$ температура газа в состоянии 2.

Участок 2 – 3 – изобарическое нагревание газа. В соответствии с законом Гей-Люссака

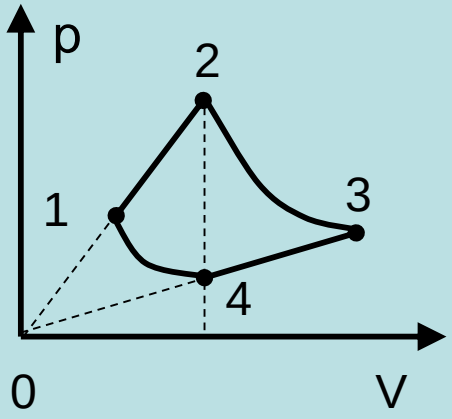
$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_2}; \ \frac{2V_o}{V_o} = \frac{T_3}{T_2} \Rightarrow \frac{T_3}{T_2} = 2; \ T_3 = 2T_2 = 6T_o -$$ температура газа в состоянии 3.

Участок 3 – 4 – изохорическое охлаждение газа. В соответствии с законом Шарля

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{T_3}{T_4}; \ \frac{3p_o}{p_o} = \frac{T_3}{T_4} \Rightarrow \frac{T_3}{T_4} = 3; \ T_4 = \frac{T_3}{3} = \frac{6T_o}{3} = 2T_o -$$ температура газа в состоянии 4.

Ответ: $T_2 = 3T_o$; $T_3 = 6T_o$; $T_4 = 2T_o$.

15. *Моль идеального газа участвует в тепловом процессе 1 – 2 – 3 – 4 – 1, изображённом в координатах p,V (см. рис.). Продолжения отрезков прямых 1 – 2 и 3 – 4 проходят через начало координат, а кривые 1 – – 4 и 2 – 3 являются изотермами. Найти объём V_3, если известны объёмы V_1 и $V_2 = V_4$, и изобразить этот процесс в координатах V,T.*



Решение. 15. Опишем изменение состояния газа на каждом участке замкнутого процесса 1 – 2 – 3 – 4 – 1.

Участок 1 – 2. Давление газа прямо пропорционально его объёму, т.е. справедливы соотношения: $p_1 = k_1V_1$; $p_2 = k_1V_2$, где k_1 – некоторый коэффициент пропорциональности.

Отсюда $$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}. \qquad (1)$$

Участок 2 – 3. Изотермическое расширение газа. В соответствии с законом Бойля-Мариотта: $p_2V_2 = p_3V_3$. (2)

Участок 3 – 4. Давление газа прямо пропорционально его объёму, т.е. справедливы соотношения: $p_3 = k_2V_3$; $p_4 = k_2V_2$, где k_2 – некоторый коэффициент пропорциональности.

Отсюда $$\frac{p_3}{V_3} = \frac{p_4}{V_2}; \quad \frac{p_3}{p_4} = \frac{V_3}{V_2} \qquad (3)$$

Участок 4 – 1. Изотермическое сжатие газа. В соответствии с законом Бойля-Мариотта: $p_1V_1 = p_4V_2$. (4)

Разделим друг на друга левые и правые части выражений (2) и (4):

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_3}{p_4} \cdot \frac{V_3}{V_2}.$$

Используем соотношения (1) и (3) и получим выражение для V_3:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^2; \ \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \Rightarrow V_3 = \frac{V_2^2}{V_1}$$ – объём газа в состоянии 3.

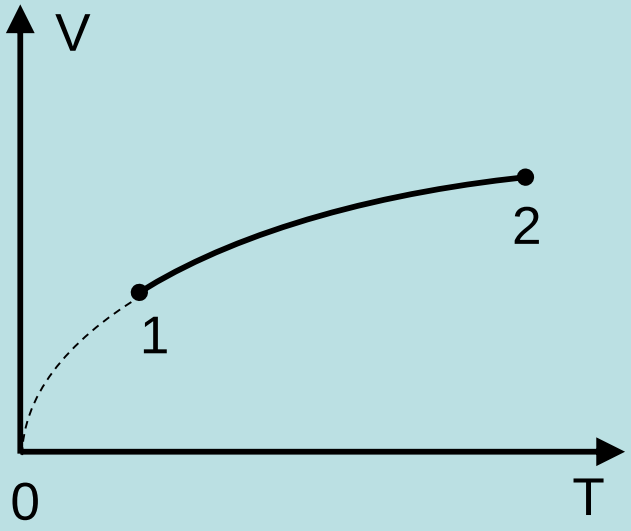
Построим график процесса на плоскости V,T.

Для этого получим уравнения зависимости V(T) на каждом участке исходного графика.

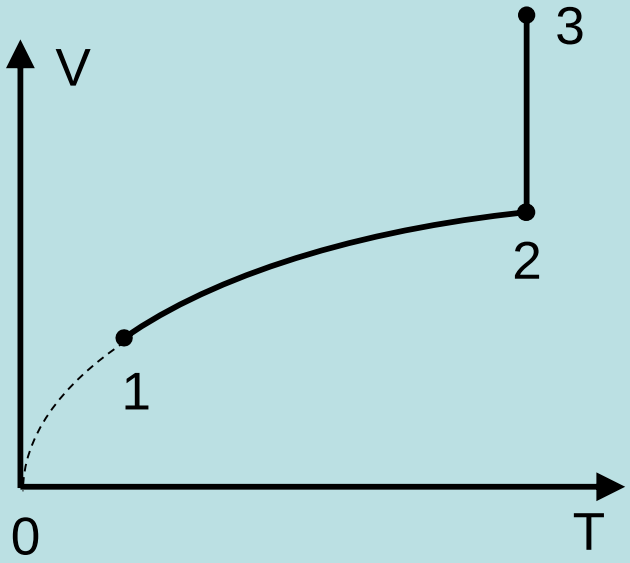
Участок 1 – 2: прямо пропорциональная зависимость между давлением и объёмом.

$$p = k_1 V;\ pV = RT \Rightarrow p = \frac{RT}{V};\ \frac{RT}{V} = k_1 V;\quad V^2 = \frac{R}{k_1} T.$$

Получено уравнение параболы, ось симметрии которой совпадает с осью T. Нарисуем эту параболу.



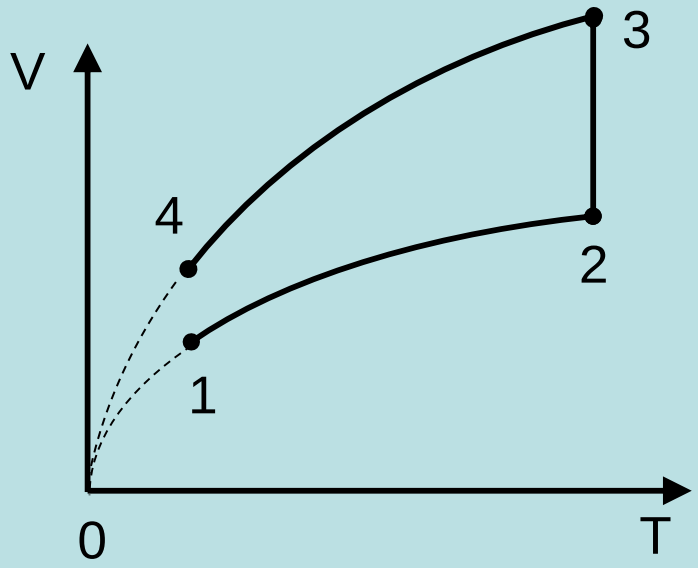
Участок 2 – 3: изотермическое расширение газа.



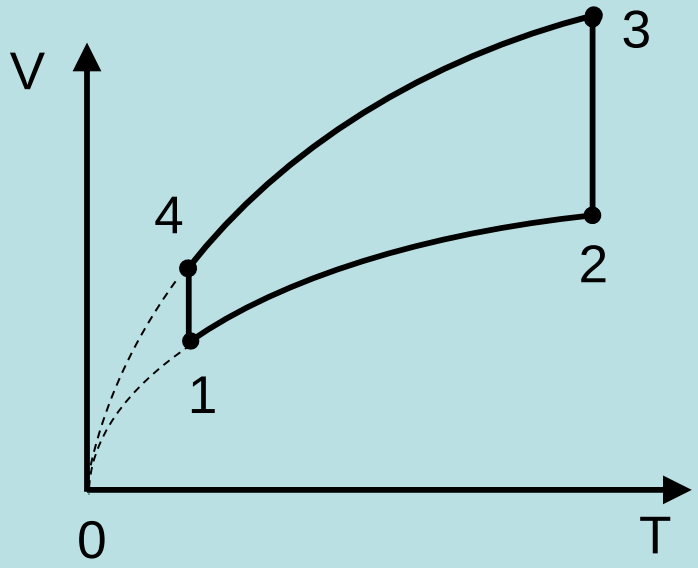
Участок 3 – 4: прямо пропорциональная зависимость между давлением и объёмом.

$$p = k_2 V;\ pV = RT \Rightarrow p = \frac{RT}{V};\ \frac{RT}{V} = k_2 V;\quad V^2 = \frac{R}{k_2} T.$$

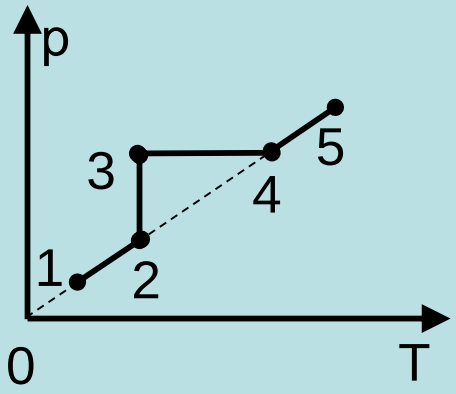
Получено уравнение параболы, ось симметрии которой совпадает с осью T. Нарисуем эту параболу.



Участок 4 – 1: изотермическое сжатие газа.



16. *С идеальным газом некоторой массы был произведён процесс, изображённый на рисунке. Нарисовать этот процесс на координатной плоскости p,V и V,T.*



Решение. Исследуем изменение состояния газа на каждом участке исходного графика.

Участок 1 – 2:

прямо пропорциональная зависимость между давлением и температурой. Это означает, что объём газа остаётся неизменным (закон Шарля), температура газа и его давление увеличиваются.

Участок 2 – 3:

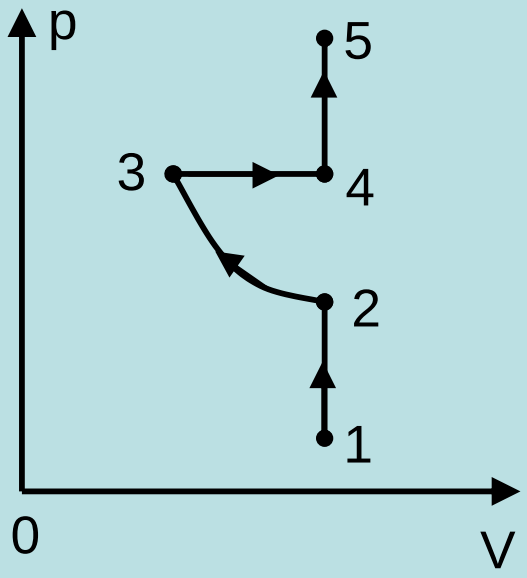
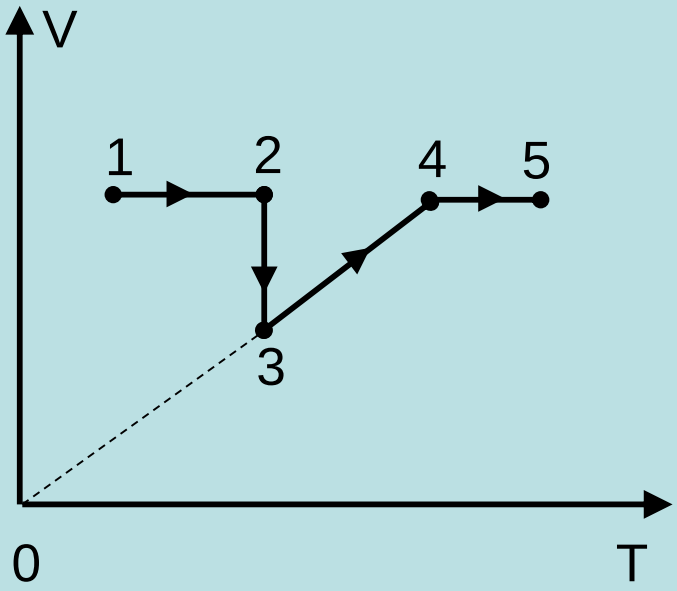
изотермическое сжатие газа (температура газа остаётся неизменной, давление газа увеличивается, объём – уменьшается).

Участок 3 – 4:

изобарическое расширение газа (давление газа остаётся неизменным, температура газа, а, значит, и его объём увеличиваются (закон Гей-Люссака)).

Участок 4 – 5:

прямо пропорциональная зависимость между давлением и температурой. Это означает, что объём газа остаётся неизменным (закон Шарля), температура и давление газа возрастают.

Заметим, что участки 1 – 2 и 4 – 5 исходного графика лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Это значит, что объём газа в этих процессах одинаков.

Построим график процесса 1 – 2 – 3 – 4 – 5 на плоскости p,V и V,T.