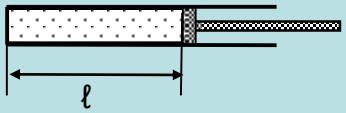
Глава III.2

Решение задач на закон Бойля-Мариотта

Методы решения задач

1. *Во сколько раз изменится давление воздуха в цилиндре (см. рис.), если поршень переместить на ℓ/4: а) влево; б) вправо?*



Решение. а) по закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$, где p_1 – давление воздуха в начальном состоянии (до перемещения поршня), $V_1 = S\ell$ – объём воздуха в начальном состоянии, p_2 – давление воздуха в конечном состоянии (после перемещения поршня), $V_2 = S(\ell - \ell/4) = 3S\ell/4$ – объём воздуха в конечном состоянии.

Выражение для закона Бойля Мариотта принимает вид:

$$p_1 S\ell = p_2 S\frac{3}{4}\ell.$$

Отсюда $p_1 = p_2\frac{3}{4};\ \frac{p_2}{p_1} = \frac{4}{3}.$

Ответ: давление воздуха в цилиндре увеличится в 4/3 ≈ 1,33 раза.

б) по закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$, где p_1 – давление воздуха в начальном состоянии (до перемещения поршня), $V_1 = S\ell$ – объём воздуха в начальном состоянии, p_2 – давление воздуха в конечном состоянии (после перемещения поршня), $V_2 = S(\ell + \ell/4) = 5S\ell/4$ – объём воздуха в конечном состоянии.

Выражение для закона Бойля Мариотта принимает вид:

$$p_1 S\ell = p_2 S\frac{5}{4}\ell.$$

Отсюда $p_1 = p_2\frac{5}{4};\ \frac{p_2}{p_1} = \frac{4}{5} = \frac{1}{5/4} = \frac{1}{1{,}25}.$

Ответ: давление воздуха в цилиндре уменьшится в 1,25 раза.

2. *При расширении газа его объём увеличился с 4 до 9 л, а давление понизилось на 120 кПа. Каким было первоначальное давление газа?*

Дано: $V_1 = 4$ л; $V_2 = 9$ л; $|\Delta p| = 120$ кПа $= 120 \cdot 10^3$ Па

p_1 – ?

Решение. По закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$, где p_1 – давление газа в начальном состоянии (до расширения), V_1 – объём газа в начальном состоянии, $p_2 = p_1 - |\Delta p|$ – давление газа в конечном состоянии (после расширения), V_2 – объём газа в конечном состоянии.

Отсюда

$$p_1V_1 = (p_1 - |\Delta p|)V_2 = p_1V_2 - |\Delta p|V_2; \quad p_1(V_2 - V_1) = |\Delta p|V_2.$$

$$p_1 = \frac{V_2}{V_2 - V_1}|\Delta p| = \frac{9л}{9л - 4л} \cdot 120 \cdot 10^3 Па = 216000 Па.$$

Ответ: первоначальное давление газа было равно 216 кПа.

3. *При уменьшении давления газа в 2,5 раза его объём увеличился на 12 л. Какой объём занимал газ в начальном состоянии?*

Дано: $p_2 = p_1/2{,}5$; $\Delta V = 12$ л;

V_1 – ?

Решение. По закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$, где p_1 – давление газа в начальном состоянии (до расширения), V_1 – объём газа в начальном состоянии, $p_2 = p_1/2{,}5$ – давление газа в конечном состоянии (после расширения), $V_2 = V_1 + \Delta V$ – объём газа в конечном состоянии.

Отсюда

$$p_1V_1 = \frac{p_1}{2{,}5}\left(V_1 + \Delta V\right) = \frac{p_1}{2{,}5}V_1 + \frac{p_1}{2{,}5}\Delta V; \quad V_1\left(p_1 - \frac{p_1}{2{,}5}\right) = \frac{p_1}{2{,}5}\Delta V$$

$$\frac{p_1V_1}{2{,}5}\left(2{,}5 - 1\right) = \frac{p_1}{2{,}5}\Delta V; \quad 1{,}5V_1 = \Delta V \Rightarrow V_1 = \frac{\Delta V}{1{,}5} = 8 \text{ л.}$$

Ответ: первоначальный объём газа был равен 8 л.

4. *Объём пузырька воздуха при всплытии со дна озера на поверхность увеличился в 2 раза. Какова глубина озера?*

Дано: $p_o = 10^5$ Па; $V_2 = 2V_1$; $\rho = 10^3$ кг/м^3

h – ?

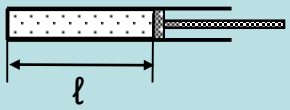
Решение. По закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$, где $p_1 = \rho gh + p_o$ – давление воздуха внутри пузырька в начальном состоянии (до всплытия), V_1 – объём газа в начальном состоянии, $p_2 = p_o$ – давление воздуха внутри пузырька газа в конечном состоянии (на поверхности водоёма), $V_2 = 2V_1$ – объём пузырька воздуха в конечном состоянии.
ρ – плотность воды, h – глубина водоёма, p_o – нормальное атмосферное давление, g = 9,8 м/с^2 – ускорение свободного падения.

Отсюда

$$(\rho gh + p_o)V_1 = p_o 2V_1; \quad \rho gh + p_o = 2p_o \Rightarrow \rho gh = p_o; h = \frac{p_o}{\rho g} = 10{,}2 \text{ м}.$$

Ответ: глубина озера 10,2 м.

5. *В цилиндре с подвижным поршнем находится воздух при нормальном атмосферном давлении $p_o = 10^5$ Па (см. рис.). Какую силу нужно приложить к поршню, чтобы удерживать его при смещении на 3 см: а) влево; б) вправо? Площадь поршня $S = 40$ см^2, первоначальный объём воздуха в цилиндре $V_1 = 360$ см^3.*



Дано: $p_o = 10^5$ Па; $V_1 = 360$ см^3 $= 360 \cdot 10^{-6}$ м^3; $S = 40$ см^2 $= 40 \cdot 10^{-4}$ м^2; $\Delta\ell = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м

F – ?

Решение. а) $V_2 = V_1 - S\Delta\ell$ – объём воздуха в цилиндре после перемещения поршня влево на $\Delta\ell$ (см. рис.).

Запишем для воздуха в цилиндре закон Бойля-Мариотта: $p_1V_1 = p_2V_2$, где $p_1 = p_o$ – атмосферное давление, p_2 – конечное давление воздуха (давление после перемещения поршня).

Отсюда $p_2 = \dfrac{V_1}{V_2} p_o = \dfrac{V_1}{V_1 - S\Delta\ell} p_o$ – давление воздуха в цилиндре после

перемещения поршня.

Запишем условие равновесие поршня после его перемещения (рис. 1):

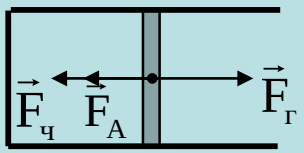


Рис.1

$F_A + F_ч = F_г$, где $F_A = p_oS$ – сила давления на поршень со стороны атмосферного воздуха, $F_ч$ – сила со стороны человека, $F_г = p_2S$ – сила давления на поршень со стороны воздуха в цилиндре.

Отсюда

$$F_ч = F_A - F_A = p_2S - p_oS = S(p_2 - p_o) = S\left(\frac{V_1}{V_1 - S\Delta\ell}p_o - p_o\right) = \frac{p_oS^2\Delta\ell}{V_1 - S\Delta\ell} = 200\,\text{Н} -$$

значение силы, приложенной к поршню со стороны человека.

б) $V_2 = V_1 + S\Delta\ell$ – объём воздуха в цилиндре после перемещения поршня вправо на $\Delta\ell$.

Запишем для воздуха в цилиндре закон Бойля-Мариотта: $p_1V_1 = p_2V_2$, где $p_1 = p_o$ – атмосферное давление, p_2 – конечное давление воздуха (давление после перемещения поршня).

Отсюда $p_2 = \frac{V_1}{V_2}p_o = \frac{V_1}{V_1 + S\Delta\ell}p_o$.

Запишем условие равновесие поршня после его перемещения (рис. 2):

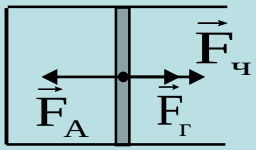


Рис.2

$F_г + F_ч = F_A$, где $F_A = p_oS$ – сила давления на поршень со стороны атмосферного воздуха, $F_ч$ – сила со стороны человека, $F_г = p_2S$ – сила со стороны газа внутри цилиндра.

Тогда $F_ч = F_A - F_г = p_oS - p_2S = S(p_o - p_2) =$

$$= S\left(p_o - \frac{V_1}{V_1 + S\Delta\ell}p_o\right) = \frac{p_oS^2\Delta\ell}{V_1 + S\Delta\ell} = 100\,\text{Н} -$$ значение силы, приложенной к поршню со стороны человека.

Ответ: 200 Н; 100 Н

6. *Компрессор забирает из атмосферы 4 л воздуха в одну секунду и подаёт его в резервуар объёмом 50 л. За какое время давление воздуха в резервуаре станет равным 10 атм.? Начальное давление воздуха в резервуаре было равно атмосферному.*

Дано: $\Delta V/\Delta t = 4$ л/с; $V = 50$ л; $p_1 = 1$ атм.; $p_2 = 10$ атм

t – ?

Решение. Будем считать, что процесс накачки резервуара закончен. Запишем для воздуха, содержащегося в накачанном резервуаре, закон Бойля-Мариотта: $p_2V = p_1V_x$, где p_2 – давление в резервуаре в конце накачки, V – объём резервуара, p_1 – атмосферное давление (и начальное давление воздуха в резервуаре), V_x – объём, который занял бы воздух, выпущенный из резервуара, при атмосферном давлении.

Отсюда $V_x = p_2V/p_1$.

Объём V_x воздуха равен сумме двух объёмов:

1) объёма V воздуха, который уже содержался в резервуаре до начала накачки;

2) объёма $V_1 = (\Delta V/\Delta t)t$ воздуха, который был добавлен в резервуар в результате работы компрессора.

Тогда $V_x = \frac{p_2}{p_1}V = V + \frac{\Delta V}{\Delta t}t \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t}t = \frac{p_2}{p_1}V - V = \frac{p_2 - p_1}{p_1}V$

Отсюда $t = \dfrac{\dfrac{p_2 - p_1}{p_1} V}{\dfrac{\Delta V}{\Delta t}} = \dfrac{p_2 - p_1}{p_1\left(\dfrac{\Delta V}{\Delta t}\right)} V -$ время работы компрессора.

Вычислим результат: $t = \dfrac{10\text{атм.} - 1\text{атм.}}{1\text{атм.} \cdot 4\dfrac{\text{л}}{\text{с}}} \cdot 50\text{л} = 112{,}5\,\text{с}.$

Ответ: t = 112,5 с.

7. Закрытую с одного конца стеклянную трубку поместили открытым концом вниз в широкий сосуд со ртутью. При этом ртуть поднялась внутрь трубки на 6 см, а высота столба воздуха над ртутью составила 44 см. Атмосферное давление было равным 74 см рт. ст. При изменении атмосферного давления высота столба ртути в трубке увеличилась на 2 см. Каким стало атмосферное давление?

Дано: h_1 = 6 см; H_1 = 44 см; p_{o1} = 74 см рт.ст.; h_2 = 8 см

p_{o2} – ?

Решение. Атмосферное давление уравновешивает в каждом случае давление p_1 и p_2 воздуха внутри трубки и давление столба ртути высотой h_1 и h_2.

Поэтому справедливы равенства: $p_{o1} = p_1 + h_1$; $p_{o2} = p_2 + h_2$.

Для воздуха внутри трубки справедлив закон Бойля-Мариотта:

$p_1V_1 = p_2V_2$, где p_1 – давление в первом случае, p_2 – давление во втором случае, $V_1 = SH_1$ – объём воздуха в первом случае, $V_2 = SH_2$ – объём воздуха во втором случае, S – площадь поперечного сечения трубки.

Длина трубки неизменна, поэтому можно записать равенство:

$H_1 + h_1 = H_2 + h_2$, где H_2 – высота столба воздуха внутри трубки во втором случае.

Тогда закон Бойля-Мариотта принимает вид:

$(p_{o1} – h_1)SH_1 = (p_{o2} – h_2)S(H_1 + h_1 – h_2)$; $(p_{o1} – h_1)H_1 = (p_{o2} – h_2)(H_1 + h_1 – h_2)$ Отсюда

$$p_{o2} - h_2 = \frac{H_1}{H_1 + h_1 - h_2}(p_{o1} - h_1); \quad p_{o2} = \frac{H_1}{H_1 + h_1 - h_2}(p_{o1} - h_1) + h_2$$

Вычислим результат: $p_{o2} = \frac{44см}{44см + 6см - 8см}(74см - 6см) + 8см = 79{,}2см$

Ответ: 79,2 см.

8. *Сосуд, содержащий 6 л воздуха под давлением 140 кПа, соединили с пустым сосудом объёмом 9 л, не содержащим воздух. Какое давление установится в обоих сосудах?*

Дано: $V_1 = 6$ л; $p_1 = 140$ кПа; $V_2 = 9$ л

p_2 – ?

Решение. Запишем для двух состояний воздуха закон Бойля--Мариотта: $p_1V_1 = p_2(V_1 + V_2)$, где p_1 – первоначальное давление воздуха, p_2 – давление воздуха после соединения сосудов, V_1 – объём первого сосуда, $V_1 + V_2$ – объём воздуха после соединения сосудов.

Отсюда $p_2 = \frac{V_1}{V_1 + V_2} p_1$.

Вычислим результат: $p_2 = \frac{6л}{6л + 9л} \cdot 140кПа = 56кПа$.

Ответ: 56 кПа.

9. *Имеются два сосуда с газом объёмом V_1 и V_2. Давление газа в первом сосуде p_1, во втором – p_2. Какое давление установится, если сосуды соединить между собой?*

Дано: p_1; p_2

p – ?

Решение. Запишем для каждой порции газа в отдельности закон Бойля-Мариотта:

$p_1V_1 = p'_1(V_1 + V_2)$, где p'_1 – давление первой порции газа после соединения сосудов (парциальное давление), $V_1 + V_2$ – объём этой порции газа после соединения сосудов.

$p_2V_2 = p'_2(V_1 + V_2)$, где p'_2 – давление второй порции газа после соединения сосудов (парциальное давление), $V_1 + V_2$ – объём этой порции газа после соединения сосудов.

Отсюда

$p'_1 = p_1V_1/(V_1 + V_2)$; $p'_2 = p_2V_2/(V_1 + V_2)$

$p = p'_1 + p'_2 = (p_1V_1 + p_2V_2)/(V_1 + V_2)$ – давление газа в обоих сосудах после их соединения.

10. *Стакан высотой H = 34 см содержит воздух при нормальном давлении $p_o = 10^5$ Па. Его опускают открытым концом в воду до момента, когда дно стакана окажется на одном уровне с поверхностью воды в сосуде. Какова будет высота h столба воды, вошедшей в стакан? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.*

Решение. Запишем для воздуха, заключённого в стакане, закон Бойля-Мариотта: $p_oSH = pS(H – h)$, где p_o – нормальное атмосферное давление, S – площадь поперечного сечения стакана, H – высота стакана, h – высота столба вошедшей в стакан воды, $V_1 = SH$ – объём воздуха внутри стакана до его погружения в воду, $V_2 = S(H – h)$ – объём воздуха внутри стакана после его погружения.

Давление воздуха внутри стакана уравновешивает два давления:

1) наружное атмосферное давление (которое передаёт вода);

2) давление столба воды высотой H – h.

Отсюда

$$p_oH = (p_o + \rho g(H – h))(H – h); \quad p_oH = p_oH – p_oh + \rho g(H – h)^2$$

$$\rho g(H – h)^2 – p_oh = 0; \ \rho gh^2 – (p_o + 2\rho gH)h + \rho gH^2 = 0$$

Получено квадратное относительно h уравнение. Решим его.

$$h = \frac{p_o + 2\rho gH \pm \sqrt{(p_o + 2\rho gH)^2 - 4\rho^2 g^2 H^2}}{2\rho g} = \frac{p_o + 2\rho gH \pm \sqrt{p_o^2 + 4p_o\rho gH}}{2\rho g}$$

Вычислим результат:

$$h = \frac{10^5\,\text{Па} + 2\cdot 10\,\text{кг/м}^3\cdot 9{,}8\,\text{м/с}^2\cdot 0{,}34\,\text{м} \pm \sqrt{(10^5\,\text{Па})^2 + 4\cdot 10^5\,\text{Па}\cdot 10^3\,\text{кг/м}^3\cdot 9{,}8\,\text{м/с}^2\cdot 0{,}34\,\text{м}}}{2\cdot 10^3\,\text{кг/м}^3\cdot 9{,}8\,\text{м/с}^2} =$$

$$= 0{,}01\,\text{м} = 1\,\text{см}.$$

Второй корень отбрасываем, так как в этом случае h > H.

Ответ: h = 0,01 м = 1 см.

11. *Стеклянная трубка, запаянная с одного конца, находясь в горизонтальном положении (см. рис.), содержит V = 200 см^3 воздуха, отделённого от наружного воздуха столбиком ртути длиной ℓ = 10 см. Каков будет объём воздуха в трубке, если её установить вертикально: а) открытым концом вверх; б) открытым концом вниз? Давление атмосферы p_o = 10^5 Па. Плотность ртути ρ = = 13600 кг/м^3.*

Дано: $V = 200$ см^3; $\ell = 10$ см $= 0{,}10$ м; $p_o = 10^5$ Па; $\rho = 13600$ кг/м^3

$V' - ?$

Решение. а) Начальное давление воздуха внутри трубки равно атмосферному: $p_1 = p_o$. При вертикальном положении трубки воздух внутри неё испытывает давление p_o атмосферного воздуха и давление $\rho g \ell$ столбика ртути высотой ℓ.

Поэтому давление воздуха внутри трубки при её вертикальном положении составляет: $p_2 = p_o + \rho g \ell$

Запишем для воздуха внутри трубки закон Бойля-Мариотта:

$$p_1 V = p_2 V'; \; p_o V = (p_o + \rho g \ell) V'.$$

Отсюда $V' = \dfrac{p_o}{p_o + \rho g \ell} V.$

Вычислим результат:

$$V' = \frac{10^5\,\text{Па}}{10^5\,\text{Па} + 13600\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9{,}8\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0{,}10\,\text{м}} \cdot 200\,\text{см}^3 = 176{,}5\,\text{см}^3.$$

б) Начальное давление воздуха внутри трубки равно атмосферному: $p_1 = p_o$. При вертикальном положении трубки давление воздуха внутри неё и давление $\rho g \ell$ столбика ртути высотой ℓ уравновешивают атмосферное давление p_o у нижнего основания трубки: $p_o = p_2 + \rho g \ell$.

Поэтому давление воздуха внутри трубки при её вертикальном положении составляет: $p_2 = p_o - \rho g \ell$.

Запишем для воздуха внутри трубки закон Бойля-Мариотта:

$$p_1 V = p_2 V'; \; p_o V = (p_o - \rho g \ell) V'$$

Отсюда $V' = \dfrac{p_o}{p_o - \rho g \ell} V.$

Вычислим результат:

$$V' = \frac{10^5\,\text{Па}}{10^5\,\text{Па} - 13600\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9{,}8\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0{,}10\,\text{м}} \cdot 200\,\text{см}^3 = 230{,}8\,\text{см}^3.$$

12. *Найти число n ходов поршня, которое надо сделать, чтобы поршневым воздушным насосом откачать воздух из сосуда объёмом V от давления p_o до давления p, если объём насоса V_o.*

Дано: $\underline{V;\ p_o;\ p;\ V_o}$

n – ?

Решение. В процессе первого движения поршня из сосуда в рабочую камеру насоса попадает воздух. Объём, занимаемый воздухом в конце первого движения поршня насоса, равен $V + V_o$, где V – объём сосуда, V_o – объём рабочей камеры насоса.

Запишем для начального и конечного состояния воздуха при первом движении поршня закон Бойля-Мариотта:

$$p_oV = p_1(V + V_o).$$

Отсюда $p_1 = \dfrac{V}{V + V_o} p_o$ – давление воздуха в системе "сосуд + + рабочая камера насоса" в конце первого движения поршня.

После этого клапан, соединяющий рабочую камеру насоса с откачиваемым сосудом, закрывается, и воздух из рабочей камеры выпускается в атмосферу.

В течение второго движения поршня насоса процесс повторяется: из сосуда в рабочую камеру насоса снова попадает воздух. Объём, занимаемый воздухом в конце второго движения поршня, опять же равен $V + V_o$, где V – объём сосуда, V_o – объём рабочей камеры насоса.

Запишем для начального и конечного состояния воздуха при втором движении поршня закон Бойля-Мариотта:

$$p_1V = p_2(V + V_o).$$

Отсюда $p_2 = \frac{V}{V+V_o}p_1 = \frac{V}{V+V_o}\cdot\frac{V}{V+V_o}p_o = \left(\frac{V}{V+V_o}\right)^2 p_o$ – давление воздуха в системе "сосуд + рабочая камера насоса" в конце второго движения поршня.

После этого клапан, соединяющий рабочую камеру насоса с откачиваемым сосудом, закрывается, и воздух из рабочей камеры опять выпускается в атмосферу.

Продолжая анализ процесса откачки воздуха из сосуда далее, получим выражение для давления воздуха в конце n-го хода поршня:

$$p_n = p = \left(\frac{V}{V+V_o}\right)^n p_o$$

Из выражения для p_n определим значение числа n ходов поршня насоса:

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{V}{V+V_o}\right)^n; \ \ell g\left(\frac{p}{p_o}\right) = \ell g\left(\frac{V}{V+V_o}\right)^n = n\ell g\left(\frac{V}{V+V_o}\right);$$

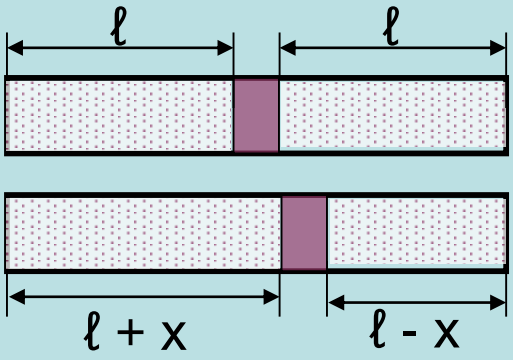
$$n = \frac{\ell g\left(\frac{p}{p_o}\right)}{\ell g\left(\frac{V}{V+V_o}\right)} = \frac{\ell g\left(\frac{p_o}{p}\right)}{\ell g\left(\frac{V+V_o}{V}\right)}$$

Ответ: $n = \dfrac{\ell g\left(\frac{p}{p_o}\right)}{\ell g\left(\frac{V}{V+V_o}\right)} = \dfrac{\ell g\left(\frac{p_o}{p}\right)}{\ell g\left(\frac{V+V_o}{V}\right)}.$

13. *В закрытом горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной 2ℓ находится 2ν молей идеального газа при температуре T. Цилиндр разделён пополам тонким гладким поршнем массой m. Найти циклическую частоту ω малых колебаний поршня, считая процесс изотермическим.*

Дано: $\underline{2\ell;\ 2\nu;\ T}$

ω – ?



Решение. По условию задачи $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, где ν_1 – количество вещества газа в левой половине сосуда, ν_2 – количество вещества газа в правой половине сосуда. Пусть S – площадь поперечного сечения цилиндрического сосуда.

Допустим, что поршень смещён на небольшое расстояние x вправо по рисунку (см. рис.).

При этом давление в левой части сосуда уменьшилось и стало равным $p_1 = p - \Delta p_1$, где p – первоначальное давление в обеих половинах сосуда, Δp_1 – изменение давления газа.

Давление в правой части сосуда увеличилось и стало равным $p_2 = p + \Delta p_2$, где p – первоначальное давление в обеих половинах сосуда, Δp_2 – изменение давления газа.

На поршень с левой и правой стороны действуют силы давления со стороны соответствующих порций газа:

$F_1 = p_1S = (p - \Delta p_1)S$ – сила давления со стороны газа в левой части сосуда. Эта сила направлена слева направо по рисунку.

$F_2 = p_2S = (p + \Delta p_2)S$ – сила давления со стороны газа в левой части сосуда. Эта сила направлена справа налево по рисунку.

Равнодействующая сил давления газа на поршень направлена влево по рисунку и равна по модулю:

$$F = F_2 - F_1 = p_2S - p_1S =$$
$$= (p_2 - p_1)S = (p + \Delta p_2 - p + \Delta p_1)S = (\Delta p_1 + \Delta p_2)S.$$

Определим, используя закон Бойля-Мариотта для каждой порции газа, изменения давления Δp_1 и Δp_2:

$$pS\ell = p_1S(\ell + x) = (p - \Delta p_1)S(\ell + x); \; p\ell = p\ell + px - (\ell + x)\Delta p_1$$
$$\Delta p_1 = px/(\ell + x).$$

$pS\ell = p_2S(\ell - x) = (p + \Delta p_2)S(\ell - x)$; $p\ell = p\ell - px + (\ell - x)\Delta p_2$

$\Delta p_2 = px/(\ell - x)$.

Тогда $F = \left(\frac{1}{\ell + x} + \frac{1}{\ell - x}\right)pSx = \frac{\ell - x + \ell + x}{(\ell - x)(\ell + x)}pSx = \frac{2\ell pS}{\ell^2 - x^2}x.$

С учётом противоположных направлений смещения поршня x и силы F предыдущее равенство примет вид:

$$F = -\frac{2\ell pS}{\ell^2 - x^2}x$$

Из полученного выражения для F следует, что эта сила не пропорциональна смещению x и поэтому не подчиняется закону Гука. В общем случае колебания поршня не будут гармоническими.

Будем считать смещение поршня малым, т.е. справедливо условие $x \ll \ell$.

Преобразуем выражение для F:

$$F = -\frac{2\ell pS}{\ell^2 - x^2}x = -\frac{2\ell pS}{\ell^2\left(1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right)}x = -\frac{2pS}{\ell}x$$

С помощью уравнения Менделеева-Клапейрона определим давление p газа:

$$pS\ell = vRT \Rightarrow p = \frac{vRT}{S\ell}.$$

Выражение для F принимает окончательный вид:

$$F = ma = -\frac{2S}{\ell} \cdot \frac{vRT}{S\ell} x = -\frac{2vRT}{\ell^2} x$$

Ускорение поршня определяется выражением:

$a = -\frac{2vRT}{m\ell^2} x = -\omega^2 x$, где ω – циклическая частота гармонических колебаний поршня.

Итак, $\omega^2 = \frac{2vRT}{m\ell^2}$; $\omega = \sqrt{\frac{2vRT}{m\ell^2}}$.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{2vRT}{m\ell^2}}$.