Глава X.3

Работа и количество теплоты

Методы решения задач

1. *Какую работу совершает газ, расширяясь изобарически при давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па от объёма $V_1 = 1,6$ л до объёма $V_2 = 2,5$ л?*

Решение. Работа газа в изобарическом (изобарном) процессе определяется выражением $A' = p\Delta V$, где p – давление, ΔV – изменение объёма газа.

$\Delta V = V_2 - V_1$, где V_2 – конечный объём газа, V_1 – начальный объём газа.

Тогда

$$A' = p(V_2 - V_1).$$

Вычислим результат:

$$A' = 2 \cdot 10^5 \text{ Па } (2,5 - 1,6) \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 180 \text{ Дж}.$$

2. *Среднее давление газа в цилиндре p = 1,2 МПа. Площадь поршня S = 300 см^2, длина хода $\Delta\ell$ = 0,5 м. Чему равна работа газа A' за один ход поршня?*

Решение. Работа газа в изобарическом (изобарном) процессе определяется выражением $A' = p\Delta V$, где p – давление, ΔV – изменение объёма газа.

$\Delta V = S\Delta\ell$, где S – площадь поршня, $\Delta\ell$ – длина его хода.

Тогда

$$A' = pS\Delta\ell.$$

Вычислим результат:

$$A' = 1{,}2\cdot10^6 \text{ Па} \cdot 300\cdot10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 5\cdot10^{-1} \text{ м} = 18000 \text{ Дж} = 18 \text{ кДж}.$$

3. *Какую работу A' совершает газ массой m при изобарном нагревании на ΔT? Молярная масса газа μ.*

Решение. Работа газа в изобарическом (изобарном) процессе определяется выражением A' = pΔV, где p – давление, ΔV – изменение объёма газа.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует (при неизменном значении давления газа):

$p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, где m – масса газа, μ – молярная масса газа, R = = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, ΔT – изменение температуры газа.

Тогда $A' = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ – работа газа в изобарном процессе.

4. *Газ массой m изобарически нагрели на ΔT. Какое количество теплоты газу при этом сообщили? Удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении c_p.*

Решение. Количество теплоты, сообщённое газу в изобарическом (изобарном) процессе, определяется выражением $Q = mc_p\Delta T$, где m – масса газа, c_p – удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении, ΔT – изменение температуры газа.

5. *Водороду массой m = 20 г при изобарном нагревании на ΔT = = 150 К сообщили количество теплоты Q_p = 80 кДж. Какую работу совершил водород при расширении? Чему равно изменение его внутренней энергии? Молярная масса водорода μ = 2 г/моль.*

Решение. Воспользуемся результатами решения задачи 3:

$A' = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ – работа водорода при изобарном расширении.

Изменение внутренней энергии водорода определим с помощью I закона термодинамики: $\Delta U = Q_p - A'$.

Вычислим результаты:

$$A' = \frac{20 \cdot 10^{-3}\,\text{кг}}{2 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 150\,\text{К} = 12465\,\text{Дж} \approx 12{,}5\,\text{кДж}.$$

$\Delta U = 8 \cdot 10^4$ Дж – $1{,}25 \cdot 10^4$ Дж = $6{,}75 \cdot 10^4$ Дж.

6. *Объём водорода при изобарическом расширении увеличился в три раза. Масса водорода m = 50 г, его начальная температура t^o_1 = 127°С. Чему равны: а) работа водорода при расширении; б) сообщённое водороду количество теплоты; в) изменение внутренней энергии? Молярная масса водорода μ = 2 г/моль.*

Решение. а) A' = $\frac{m}{\mu} R\Delta T$ – работа водорода при изобарном расширении.

Для изобарического расширения водорода справедлив закон Гей-Люссака:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$, где V_1 и V_2 – начальный и конечный объём водорода

соответственно, T_1 и T_2 – начальная и конечная температура водорода соответственно.

Отсюда

$T_2 = 3T_1$ ($V_2 = 3V_1$ – по условию); $\Delta T = T_2 - T_1 = 3T_1 - T_1 = 2T_1$

$$A' = \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{m}{\mu} R\,2T_1 = 2\frac{m}{\mu} RT_1.$$

б) Из таблицы, приведённой в сборниках задач, найдём значение удельной теплоёмкости водорода при постоянном давлении: $c_p = 14300$ Дж/(кг·К).

Тогда $Q_p = mc_p\Delta T = 2mc_pT_1$ – количество теплоты, сообщённое водороду в процессе изобарического расширения.

в) Изменение внутренней энергии водорода найдём из I закона термодинамики: $\Delta U = Q_p - A'$.

Вычислим результаты:

$$A' = 2 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}\,\text{кг}}{2 \cdot 10^{-3}\,\text{кг / моль}} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 400\,\text{К} = 166200\,\text{Дж}.$$

$Q_p = 2 \cdot 50 \cdot 10^{-3}$ кг·14300 Дж/(кг·К)·400 К = 572000 Дж

ΔU = 572000 Дж – 166200 Дж = 405800 Дж

7. *Газ с молярной массой μ и удельной теплоёмкостью при постоянном давлении c_p изобарически нагревают. Какую долю от полученного газом количества теплоты составляют: а) работа, совершённая газом при расширении; б) изменение внутренней энергии газа? Вычислить результат для азота.*

Решение. а) $A' = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ – работа газа при изобарическом рас - ширении.

$Q_p = mc_p\Delta T$ – количество теплоты, полученное газом в изобарическом процессе.

Тогда $$\frac{A'}{Q_p} = \frac{\frac{m}{\mu} R\Delta T}{mc_p\Delta T} = \frac{R}{\mu c_p}.$$

б) $\Delta U = Q_p - A'$ – изменение внутренней энергии газа.

Тогда $$\frac{\Delta U}{Q_p} = \frac{Q_p - A'}{Q_p} = \frac{mc_p\Delta T - \frac{m}{\mu}R\Delta T}{mc_p\Delta T} = \frac{\mu c_p - R}{\mu c_p}.$$

Вычислим результаты для азота (c_p = 1050 Дж/(кг·К):

$$\frac{A'}{Q_p} = \frac{8{,}31\,\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})}{28\cdot10^{-3}(\text{кг}/\text{моль})\cdot1050\,\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})} = 28{,}3\cdot10^{-2} = 28{,}3\%$$

$$\frac{\Delta U}{Q_p} = \frac{28\cdot10^{-3}(\text{кг}/\text{моль})\cdot1050\,\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) - 8{,}31\,\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})}{28\cdot10^{-3}(\text{кг}/\text{моль})\cdot1050\,\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})} =$$

$$= 71{,}7\cdot10^{-2} = 71{,}7\%.$$

Как следует из расчётов, бóльшая часть сообщённого газу количества теплоты затрачивается на увеличение его внутренней энергии.

8. *Газ с молярной массой μ и удельной теплоёмкостью при постоянном давлении c_p нагревают два раза: один раз – изобарически, другой раз – изохорически. Каково отношение Q_p/Q_V? Масса газа и разность температур в обоих случаях одинаковы.*

Решение. В случае изобарического нагревания газа сообщённое ему количество теплоты идёт на: 1) изменение его внутренней энергии; 2) совершение им работы над внешними телами.

В соответствии с первым законом термодинамики $Q_p = \Delta U + A'$.

В случае изохорического нагревания газа сообщённое ему количество теплоты идёт только на увеличение его внутренней энергии: $Q_V = \Delta U$.

Тогда

$$\frac{Q_p}{Q_V} = \frac{Q_p}{Q_p - A'} = \frac{mc_p\Delta T}{mc_p\Delta T - \frac{m}{\mu}R\Delta T} = \frac{\mu c_p}{\mu c_p - R}.$$

9. *Одноатомный газ массой m изобарически нагревают на ΔT. Какое количество теплоты Q_p для этого потребуется? Молярная масса газа μ.*

Решение. В случае изобарического нагревания газа сообщённое ему количество теплоты идёт на 1) изменение его внутренней энергии и на 2) совершение им работы над внешними телами.

В соответствии с первым законом термодинамики $Q_p = \Delta U + A'$.

Изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа и совершённая им работа определяются выражениями

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T; \quad A' = \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Тогда

$$Q_p = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T + \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

10. *Используя решение предыдущей задачи, получить значение удельной теплоёмкости c_p одноатомного идеального газа при постоянном давлении.*

Решение. Количество теплоты Q_p, полученное одноатомным идеальным газом при изобарическом расширении, определяется выражением $Q_p = mc_p\Delta T$.

Воспользуемся выражением для Q_p, полученным в решении предыдущей задачи:

$$Q_p = \frac{5}{2}\cdot\frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Приравняем оба выражения для Q_p и получим значение c_p:

$$mc_p\Delta T = \frac{5}{2}\cdot\frac{m}{\mu}R\Delta T \Rightarrow \quad c_p = \frac{5}{2}\cdot\frac{R}{\mu}.$$

11. *Одноатомный идеальный газ изобарически нагревают. Какую долю от полученного газом количества теплоты составляют: а) работа, совершённая газом при расширении; б) изменение внутренней энергии газа?*

Решение. а) $A' = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ – работа газа при изобарическом рас - ширении.

$Q_p = mc_p\Delta T$ – количество теплоты, полученное газом в изобарическом процессе.

Тогда $$\frac{A'}{Q_p} = \frac{\frac{m}{\mu} R\Delta T}{mc_p\Delta T} = \frac{R}{\mu c_p} = \frac{R}{\mu \frac{5}{2} \cdot \frac{R}{\mu}} = \frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\%.$$

б) $\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T$ – изменение внутренней энергии газа.

Тогда $$\frac{\Delta U}{Q_p} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T}{\frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T} = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%.$$

12. *Получить выражение для удельной теплоёмкости c_V одноатомного идеального газа с молярной массой μ в изохорическом процессе.*

Решение. Количество теплоты Q_V, полученное одноатомным идеальным газом при изохорическом нагревании, определяется выражением: $Q_V = mc_v\Delta T$.

При изохорическом нагревании всё подведённое к газу количество теплоты идёт на изменение его внутренней энергии:

$$Q_V = \Delta U = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Приравняем оба выражения для Q_p и получим значение c_p:

$$mc_v\Delta T = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{\mu}R\Delta T \Rightarrow \quad c_v = \frac{3}{2}\cdot\frac{R}{\mu}.$$

13. *Идеальный одноатомный газ расширяется таким образом, что его давление прямо пропорционально объёму: p = αV. Чему равна молярная теплоёмкость газа в этом процессе?*

Решение. A' = $\frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$ – работа газа в этом процессе.

Раскроем выражение для A' подробней:

$$A' = \frac{\alpha V_1 + \alpha V_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{\alpha V_1^2}{2}\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right).$$

Используем уравнение состояния идеального газа:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2};\ \frac{\alpha V_1 V_1}{T_1} = \frac{\alpha V_2 V_2}{T_2};\ \frac{\alpha V_1^2}{T_1} = \frac{\alpha V_2^2}{T_2};\ \frac{V_1^2}{T_1} = \frac{V_2^2}{T_2}.$$

Отсюда $\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{T_2}{T_1}$;

$$A' = \frac{\alpha V_1^2}{2}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \frac{\alpha V_1^2}{2} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{\alpha V_1 \cdot V_1}{T_1} \cdot \frac{\Delta T}{2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{\Delta T}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

В соответствии с I законом термодинамики: $Q = \Delta U + A'$.

Тогда $$Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T = 2\frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Удельная теплоёмкость газа в этом процессе равна

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{2\frac{m}{\mu} R\Delta T}{m\Delta T} = 2\frac{R}{\mu}.$$

$C_\mu = c\mu = 2R$ – молярная теплоёмкость газа в данном процессе.

14. *После включения отопления воздух в комнате нагрелся от температуры T_o до температуры T. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия воздуха, находящегося в комнате?*

Решение. Процесс нагревания воздуха в комнате можно считать изобарическим, так как он протекает при неизменном атмосферном давлении (воздух в комнате сообщается с атмосферным воздухом).

Будем считать воздух идеальным газом. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул воздуха в состоянии теплового равновесия прямо пропорциональна абсолютной температуре, а энергия всего воздуха в комнате пропорциональна числу молекул, т.е. числу молей воздуха в комнате: $U = \nu C_{\mu V} T$, где $C_{\mu V}$ – молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, ν – количество вещества воздуха, T – абсолютная температура.

Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона: $\nu T = \frac{pV}{R}$.

Выражение для U принимает следующий вид:

$$U = C_{\mu V} \frac{pV}{R}.$$

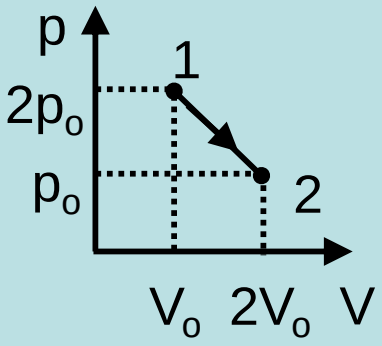
При неизменных значениях давления воздуха и его объёма (объём комнаты неизменен) неизменной остаётся и внутренняя энергия воздуха внутри комнаты.

Для чего же тогда протапливают комнату? Человеку важна не внутренняя энергия воздуха, а его температура, которая при протапливании увеличивается.

Энергия нагревателя целиком "выходит" наружу: масса воздуха в комнате при изобарном нагревании уменьшается (из-за негерметич-

ности комнаты).

15. *Какое количество теплоты получает одноатомный идеальный газ при нагревании в ходе процесса, изображённого на рисунке? Получает или отдаёт тепло газ при охлаждении? Чему равно это количество теплоты?*



Решение. Для точек 1 и 2 используем уравнение состояния идеального газа и сравним температуры в этих состояниях:

$$\frac{2p_oV_o}{T_1} = \frac{p_o2V_o}{T_2};\ T_1 = T_2.$$

Начальная и конечная температуры газа в процессе 1 – 2 одинаковы.

На отрезке 1 – 2 существует точка 3, соответствующая максимальной температуре газа в данном процессе. В этой точке изотерма с максимальной температурой T_m касается отрезка 1 – 2.

Определим значение T_m. Для этого сначала определим значения коэффициентов a и b в зависимости давления газа от объёма (p = a – bV).

Подставим в зависимость p = a – bV значения p и V в точках 1 и 2:

$$\begin{cases} 2p_o = a - bV_o \\ p_o = a - b2V_o \end{cases} \Rightarrow 2p_o - p_o = a - bV_o - a + b2V_o; p_o = bV_o; b = \frac{p_o}{V_o}.$$

Подставим полученное значение b в верхнее уравнение системы и определим значение коэффициента a:

$$2p_o = a - \frac{p_o}{V_o}V_o = a - p_o \Rightarrow a = 3p_o.$$

Точка 3 находится на отрезке 1 – 2 и поэтому для неё справедлива зависимость $p_3 = a - bV_3$, где p_3 и V_3 – давление и объём газа в точке 3 соответственно.

Тогда $p_3 = 3p_o - \frac{p_o}{V_o}V_3.$

Запишем для газа в состоянии 3 уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$\left(3p_o - \frac{p_o}{V_o}V_3\right)V_3 = \nu RT_3.$$

Отсюда получим квадратное относительно V_3 уравнение:

$$-\frac{p_o}{V_o}V_3^2 + 3p_oV_3 - \nu RT_3 = 0.$$

Данное квадратное уравнение имеет решение при условии :

$$(3p_o)^2 - 4\left(-\frac{p_o}{V_o}\right)(-\nu RT_3) \geq 0;\ \ 9p_o^2 \geq 4\frac{p_o\nu RT_3}{V_o};\ 9p_o \geq 4\frac{\nu RT_3}{V_o}.$$

Отсюда

$$T_3 \leq \frac{9p_oV_o}{4\nu R};\ T_m = \frac{9p_oV_o}{4\nu R} -$$ максимальная температура газа в процессе 1 – 2.

Таким образом, на участке 1 – 3 газ нагревался, на участке 3 – 2 охлаждался.

Определим изменение температуры газа на участках 1 – 3 и 3 – 2:

$$2p_oV_o = \nu RT_1 \Rightarrow T_1 = T_2 = \frac{2p_oV_o}{\nu R};\ T_m - T_1 = \frac{9p_oV_o}{4\nu R} - \frac{2p_oV_o}{\nu R} = \frac{p_oV_o}{4\nu R}.$$

Определим давление и объём газа в точке 3:

$$p_3V_3 = \nu RT_m = \nu R\frac{9p_oV_o}{4\nu R} = \frac{9}{4}p_oV_o;\ p_3 = \frac{9}{4}\cdot\frac{p_oV_o}{V_3} = 3p_o - \frac{p_o}{V_o}V_3.$$

$$\frac{4}{V_o}V_3^2 - 12V_3 + 9V_o = 0;\ V_3 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot\frac{4}{V_o}\cdot 9V_o}}{2\cdot\frac{4}{V_o}} = \frac{3}{2}V_o.$$

$$p_3 = 3p_o - \frac{p_o}{V_o}\cdot\frac{3}{2}V_o = \frac{3}{2}p_o.$$

Точка 3 находится в середине отрезка 1 – 2.

Определим работу газа на участке 1 – 3 и изменение его внутренней энергии:

$$A'_{1-3} = \frac{2p_o + \frac{3}{2}p_o}{2}\left(\frac{3}{2}V_o - V_o\right) = \frac{7}{8}p_oV_o; \quad \Delta U_{1-3} = \frac{3}{2}\nu R \cdot \frac{p_oV_o}{4\nu R} = \frac{3}{8}p_oV_o.$$

В соответствии с первым законом термодинамики:

$$Q_{1-3} = \Delta U_{1-3} + A'_{1-3} = \frac{3}{8}p_oV_o + \frac{7}{8}p_oV_o = \frac{10}{8}p_oV_o = \frac{5}{4}p_oV_o -$$ количество теплоты, полученное газом при нагревании.

На участке 3 – 2 газ охлаждается, поэтому

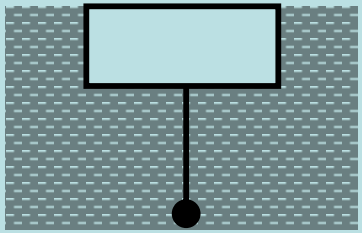
$$\Delta U_{3\text{-}2} = -\Delta U_{1\text{-}3} = -\frac{3}{8}p_oV_o.$$

Определим работу газа на участке 3 – 2:

$$A'_{3-2} = \frac{\frac{3}{2}p_o + p_o}{2}\left(2V_o - \frac{3}{2}V_o\right) = \frac{5}{8}p_oV_o.$$

Тогда $Q_{3\text{-}2} = \frac{5}{8}p_oV_o - \frac{3}{8}p_oV_o = \frac{1}{4}p_oV_o$.

На участке 3 – 2 газ получает количество теплоты, охлаждаясь при этом.



16. *Понтон массы m = 2000 кг, сечения S = 4 м^2 и высоты h = 1 м с помощью тяжёлого якоря, лежащего на дне, удерживается в положении, показанном на рисунке (крышка понтона находится на уровне поверхности воды). Трос, соединяющий понтон с якорем, отцепили, и понтон всплыл. Какое количество теплоты выделилось при всплытии понтона?*

Решение. Вычислим массу воды в объёме понтона:

$m_в = \rho_в Sh = 1000$ кг/м^3 ·4 м^2 · 1 м = 4000 кг = 2 m.

Сила Архимеда (выталкивающая сила) в покоящейся жидкости всегда направлена вертикально вверх (к поверхности жидкости). Работа этой силы при перемещении тела не зависит от формы траектории, а определяется только глубиной погружения тела в на-

чальной и конечной точках траектории.

Такие свойства силы Архимеда позволяют считать её потенциальной силой и ввести понятие "поля силы Архимеда", направленного всегда внутри жидкости к её поверхности.

Тогда можно говорить и о потенциальной энергии тела в "поле силы Архимеда".

Работа силы Архимеда $A = F_A h$ при подъёме тела с глубины h к поверхности жидкости совершается за счёт убыли потенциальной энергии системы: $F_A h = -(0 - E_p) = E_p$, где 0 – потенциальная энергия системы "тело + жидкость" на поверхности жидкости.

Таким образом, потенциальная энергия тела, имеющего объём V и погруженного в жидкость плотностью $\rho_ж$, определяется выражением: $E_p = F_A h = \rho_ж g V h$, где h – глубина погружения центра масс жидкости в объёме тела, $F_A = \rho_ж g V$ – модуль силы Архимеда.

Если тело погружено в жидкость не полностью, то под объёмом V следует понимать объём только его погруженной части, а под глубиной h – глубину погружения центра масс жидкости в объёме погруженной части тела.

В качестве уровня с нулевой потенциальной энергией тела в "поле силы Архимеда" удобно брать поверхность жидкости.

В данной задаче с поверхностью воды совместим и нулевой уровень отсчёта потенциальной энергии понтона в поле силы тяжести.

Определим полную механическую энергию системы "понтон + вода + земля" в начальном состоянии:

$$E_1 = -mg\frac{h}{2} + m_в g\frac{h}{2} = \frac{1}{2}mgh\text{, где}$$

$-mg\frac{h}{2}$ – потенциальная энергия понтона в поле силы тяжести;

$m_в g\frac{h}{2} = 2mg\frac{h}{2}$ – потенциальная энергия понтона в поле силы Архимеда.

В конечном состоянии понтон будет покоиться на поверхности воды.

Понтон будет плавать на поверхности воды при условии, что вес вытесненной им воды будет равен весу самого понтона:

$$mg = \rho_в g S h_o;\ m = \rho_в S h_o.$$

Отсюда $h_o = \dfrac{m}{\rho_в S}$ – глубина погружения в воду нижней грани понтона.

The picture can't be displayed.

Составим систему из выражений для h и h_o и найдём связь между ними:

$$\begin{cases} h = \dfrac{2m}{\rho_в S} \\ h_o = \dfrac{m}{\rho_в S} \end{cases} \Rightarrow h_o = \frac{h}{2}$$ – глубина погружения нижней грани понтона в состоянии равновесия.

Центр масс понтона находится на высоте h/2 от его нижней грани. В конечном состоянии центр масс понтона будет находиться на уровне поверхности воды: $h/2 = h_o$.

Центр масс воды в объёме погруженной части понтона находится от поверхности воды на глубине $h_o/2 = h/4$.

Масса воды в объёме погруженной части понтона $m'_в$ равна массе m самого понтона (условие плавания понтона).

Определим полную механическую энергию системы "понтон + вода + земля" в конечном состоянии:

$$E_2 = mg\,0 + mg\frac{h}{4} = 0 + mg\frac{h}{4} = mg\frac{h}{4}, \text{где}$$

0 – потенциальная энергия понтона в поле силы тяжести;

$m'_в g\frac{h_o}{2} = mg\frac{h}{4}$ – потенциальная энергия понтона в "поле силы Архимеда".

Найдём изменение полной механической энергии системы тел, приведённой в условии задачи: $\Delta E = E_2 - E_1 =$

$$= mg\frac{h}{4} - \frac{1}{2}mgh = -\frac{mgh}{4}.$$

Модуль изменения полной механической энергии системы тел равен количеству теплоты, выделенному системой в процессе перехода в состояние равновесия:

$$Q = |\Delta E| = \frac{mgh}{4} = 5000 \text{ Дж}.$$

17. *Какому давлению был подвергнут лёд массой M = 20 г, заключённый в теплонепроницаемую оболочку при 0°C, если при этом расплавилось m = 1,6 г льда и, кроме того, известно, что при увеличении давления на Δp = 14 МПа температура плавления понижается на Δt^o = 1°C? Считать, что понижение температуры плавления пропорционально повышению давления.*

Решение. Работа внешних сил в случае тепловой изоляции представленной в условии задачи системы тел затрачивается на перераспределение энергии между молекулами льда (воды).

При сжатии льда и понижении температуры плавления от $t^o_{оп}$ до $t^o_{1п}$ энергия теплового движения молекул льда массой M уменьшится на

$\Delta U_1 = cM(t^o_{оп} - t^o_{1п})$, где c – удельная теплоёмкость льда.

Так как система изолирована, то вся выделяющаяся при сжатии энергия пойдёт на плавление льда массой m:

$Mc(t^o_{оп} - t^o_{1п}) = m\lambda$, где λ – удельная теплота плавления льда.

Свяжем изменение давления на лёд и изменение температуры его плавления:

$t^o_{оп} - t^o_{1п} = k(p - p_o)$, где $k = \Delta t^o/\Delta p$ – коэффициент пропорциональности, $p_o = 10^5$ Па – нормальное атмосферное давление.

Тогда $Mck(p - p_o) = m\lambda$.

Отсюда $p - p_o = \dfrac{m\lambda}{Mck}$; $p = p_o + \dfrac{m\lambda}{Mck}$ – искомое давление на лёд.

Вычислим результат:

$$p = 10^5\,\text{Па} + \frac{0{,}0016\,\text{кг} \cdot 3{,}3 \cdot 10^5\,\text{Дж/кг}}{0{,}020\,\text{кг} \cdot 2100\,\text{Дж/(кг} \cdot 1^o\text{C)} \cdot \dfrac{1^o\text{C}}{14 \cdot 10^6\,\text{Па}}} = 1{,}76 \cdot 10^8\,\text{Па}.$$

18. *С какой скоростью v должны лететь навстречу друг другу две льдинки массами m_1 и $m_2 = m_1/2$, имеющие температуру t^o = = – 10^oC, чтобы при ударе они обратились в пар? Удельные теплоёмкость и теплота плавления льда равны соответственно c = 2900 Дж/(кг·1°C) и $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг. Удельная теплота парообразования воды при 100°C равна $L = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.*

Решение. Для неупругого соударения льдинок справедлив закон сохранения импульса вдоль направления их движения:

$m_1v - m_2v = (m_1 + m_2)u$, где u – скорость движения центра масс льдинок после столкновения.

Отсюда
$$u = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v.$$

Определим кинетическую энергию льдинок до и после соударения:

$$E_{ko} = \frac{m_1}{2} v^2 + \frac{m_2}{2} v^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} v^2;$$

$$E_k = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \right)^2 = \frac{(m_1 - m_2)^2}{2(m_1 + m_2)} v^2.$$

Тогда $\Delta E_k = E_k - E_k =$

$$= \frac{(m_1 - m_2)^2}{2(m_1 + m_2)} v^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 = \frac{(m_1 - m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2(m_1 + m_2)} v^2 =$$

$= -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$ – изменение кинетической энергии льдинок.

$\Delta U = |\Delta E_k|$ – изменение внутренней энергии льдинок в результате неупругого соударения.

$\Delta U_1 = (m_1 + m_2)c(0^o - t^o) = (m_1 + m_2)c(-t^o)$ изменение внутренней энергии льдинок при нагреве до температуры плавления.

$\Delta U_2 = (m_1 + m_2)\lambda$ – изменение внутренней энергии льдинок в процессе плавления при 0^oC.

$\Delta U_3 = (m_1 + m_2)c_в \cdot 100^oC$ – изменение внутренней энергии льдинок при нагреве от 0^oC до 100^oC.

$\Delta U_4 = (m_1 + m_2)L$ – изменение внутренней энергии льдинок в процессе парообразования при температуре 100°С.

Тогда

$$\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}v^2 = (m_1 + m_2)c(-t^o) + (m_1 + m_2)\lambda +$$

$$+ (m_1 + m_2)c_в \cdot 100^oC + (m_1 + m_2)L;$$

$$\frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}v^2 = c(-t^o) + \lambda + c_в \cdot 100^oC + L.$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{(m_1+m_2)^2}{2m_1m_2}\left(c(-t^o) + \lambda + c_в 100^o C + L\right)$$

$$v = (m_1+m_2)\sqrt{\frac{c(-t^o) + \lambda + c_в 100^o C + L}{2m_1m_2}}$$ – искомая скорость льдинок.

Учтём условие $m_1 = 2m_2$.

$$v = (2m_2 + m_2)\sqrt{\frac{c(-t^o) + \lambda + c_в 100^o C + L}{2 \cdot 2m_2^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{c(-t^o) + \lambda + c_в 100^o C + L}.$$

Вычислим результат:

$$v = \frac{3}{2}\sqrt{2100\frac{Дж}{кг \cdot 1^o C} \cdot 10^o C + 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг} + 4200\frac{Дж}{кг \cdot 1^o C} \cdot 100^o C + 2{,}26 \cdot 10^6 \frac{Дж}{кг}} =$$

= 2613 м/с ≈ 2,6 км/с.

19. *Два сообщающихся сосуда с сечениями S_1 = 100 см^2 и S_2 = = 2S заполнены водой и закрыты лёгкими поршнями. Система находится в равновесии. В этом положении на больший поршень помещают гирю массой m = 1 кг. Какое количество теплоты выделится в системе при переходе в новое положение равновесия?*

Решение. Совместим уровень с нулевой потенциальной энергией тел в поле силы тяжести с дном обоих сосудов.

Высота центров масс воды над нулевым уровнем в обоих сосудах одинакова и равна половине высоты столбов воды (h_{o1} = = h_{o2} = h/2) .

m_1 = ρSh – масса воды в меньшем сосуде; m_2 = ρ2Sh – масса воды в большем сосуде (ρ – плотность воды).

Вычислим полную механическую энергию системы тел в начальном состоянии:

$E_1 = m_1gh_{o1} + m_2gh_{o1} + mg2h_{o1} = 3\rho Sgh^2/2 + mgh$, где

$m_1gh_{o1} = \rho Shgh/2 = \rho Sgh^2/2$ – потенциальная энергия воды в меньшем сосуде;

$m_2gh_{o1} = \rho 2Shgh/2 = \rho Sgh^2$ – потенциальная энергия воды в большем сосуде;

$mg2h_{o1} = mgh$ – потенциальная энергия гири.

Система придёт в равновесие при условии равенства давлений воды у дна обоих сосудов: $\rho gh_1 = \rho gh_2 + mg/(2S)$, где

h_1 – высота столба воды в меньшем сосуде, h_2 – высота столба

в большем сосуде.

Определим объём воды, перетекшей из большего сосуда в меньший: $S(h_1 - h) = 2S(h - h_2)$.

Отсюда $h_1 - h = 2(h - h_2)$; $h_1 - h = 2h - 2h_2$; $h_1 + 2h_2 = 3h$.

Получена система из двух уравнений:

$$\begin{cases} h_1 + 2h_2 = 3h \\ \rho h_1 = \rho h_2 + \dfrac{m}{2S} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} h_1 + 2h_2 = 3h \\ h_1 - h_2 = \dfrac{m}{2\rho S} \end{cases}$$

Вычтем из верхнего уравнения нижнее:

$$h_1 + 2h_2 - h_1 + h_2 = 3h - \frac{m}{2\rho S};\ 3h_2 = 3h - \frac{m}{2\rho S};\ h_2 = h - \frac{m}{6\rho S}.$$

Подставим выражение для h_2 в нижнее уравнение:

$$h_1 - h + \frac{m}{6\rho S} = \frac{m}{2\rho S};\ h_1 = h + \frac{m}{2\rho S} - \frac{m}{6\rho S} = h + \frac{m}{3\rho S}.$$

Тогда

$m'_1 = \rho S h_1 = \rho S\left(h + \frac{m}{3\rho S}\right)$ – масса воды в меньшем сосуде.

$m'_2 = \rho 2 S h_2 = \rho 2 S\left(h - \frac{m}{6\rho S}\right)$ – масса воды в большем сосуде.

Вычислим полную механическую энергию системы тел в конечном состоянии:

$E_2 = m'_1 g h_1/2 + m'_2 g h_2/2 + m g h_2$

$$= \frac{\rho g S}{2}\left(h + \frac{m}{3\rho S}\right)^2 + \frac{\rho g 2S}{2}\left(h - \frac{m}{6\rho S}\right)^2 + mg\left(h - \frac{m}{6\rho S}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\rho g S h^2 - \frac{m^2 g}{12\rho S} + mgh.$$

Определим изменение полной механической энергии системы тел: $\Delta E = E_2 - E_1 =$

$$= \frac{3}{2}\rho g S h^2 - \frac{m^2 g}{12\rho S} + mgh - \frac{3}{2}\rho g S h^2 - mgh = -\frac{m^2 g}{12\rho S}.$$

$Q = |\Delta E|$ – выделенное в системе количество теплоты.

Итак, $Q = \dfrac{m^2 g}{12\rho S}$ – количество теплоты, выделенное в системе в процессе установления равновесия.

Вычислим результат:

$$Q = \frac{(1\text{кг}) \cdot 9{,}8\text{м/с}^2}{12 \cdot 1000\text{кг/м}^3 \cdot 100 \cdot 10^{-4}\text{м}^2} = 0{,}08\ \text{Дж}.$$

20. *В вертикальном цилиндре сечением S под поршнем массой M находится масса m азота при температуре T и давлении p. Какова сила трения между поршнем и стенками цилиндра, если для того, чтобы сдвинуть поршень, газу сообщили количество теплоты Q? Атмосферное давление p_o, удельная теплоёмкость азота при постоянном объёме c_V.*

Решение. До момента сдвига поршня газ нагревается при постоянном объёме. Поэтому $Q = Q_V = mc_V\Delta T$, где m – масса газа, c_V – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме, ΔT – измене-

ние температуры газа в процессе нагрева.

Для изохорического нагрева азота справедлив закон Шарля:

$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$, где $p_1 = p$ – начальное давление газа, p_2 – конечное давление, $T_1 = T$ – начальная температура газа, T_2 – конечная температура.

Из закона Шарля определим конечную температуру азота:

$$T_2 = \frac{p_2}{p} T.$$

Тогда $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{p_2}{p} T - T = \left(\frac{p_2}{p} - 1\right) T = \frac{p_2 - p}{p} T.$

Поршень непосредственно перед сдвигом находится в равновесии под действием четырёх сил: 1) $F_{тр.}$ – максимальной силы трения покоя; 2) $F_o = p_o S$ – силы атмосферного давления; 3) $F = p_2 S$ – силы давления со стороны азота; 4) Mg – веса поршня.

Силы $F_{тр.}$, Mg и F_o направлены внутрь цилиндра, сила F – из ци-

линдра наружу.

Поэтому для состояния равновесия поршня непосредственно перед сдвигом справедливо равенство:

$$F_{тр.} + F_o + Mg = F; \quad F_{тр.} + p_oS + Mg = p_2S.$$

Отсюда $F_{тр.} = p_2S - p_oS - Mg = (p_2 - p_o)S - Mg.$

Из выражения для Q найдём значение p_2:

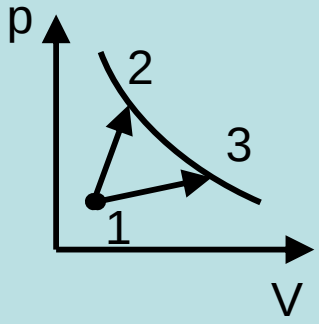
$$Q = mc_v\Delta T = mc_v \cdot \frac{p_2 - p}{p} T \Rightarrow p_2 - p = \frac{pQ}{mc_vT};$$

$$p_2 = p + \frac{pQ}{mc_vT}.$$

Тогда

$$F_{тр.} = \left(p - p_o + \frac{pQ}{mc_vT}\right)S - Mg = \left[p\left(1 + \frac{Q}{mc_vT}\right) - p_o\right]S - Mg.$$

21. *Над газом совершают два тепловых процесса, нагревая его из одного и того же начального состояния до одинаковой конечной температуры. На pV – диаграмме процессы изображены прямыми линиями 1 – 2 и 1 – 3. Определить, в каком процессе газу сообщается большее количество теплоты.*



Решение. Рассмотрим изменение состояния газа в процессах 1 – 2 и 1 – 3.

Вычислим работу газа в этих процессах (при этом учтём, что зависимость давления газа от объёма – линейная):

$$A'_{1-2} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1); \qquad A'_{1-3} = \frac{p_1 + p_3}{2}(V_3 - V_1).$$

Изменение внутренней энергии газа в обоих процессах одинаково, так как точки 2 и 3 находятся на одной изотерме:

$$\Delta U_{1\text{-}2} = \Delta U_{1\text{-}3}.$$

Вычислим количество теплоты, полученное газом в каждом процессе:

$$Q_{1\text{-}2} = \Delta U_{1\text{-}2} + A'_{1\text{-}2}; \qquad Q_{1\text{-}3} = \Delta U_{1\text{-}3} + A'_{1\text{-}3};$$

Сравним $Q_{1\text{-}3}$ и $Q_{1\text{-}2}$. Для этого вычислим разность этих величин:

$$Q_{1\text{-}3} - Q_{1\text{-}2} = A'_{1\text{-}3} - A'_{1\text{-}2} = \frac{p_1 + p_3}{2}(V_3 - V_1) - \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{p_1V_3 - p_1V_1 + p_3V_3 - p_3V_1 - p_1V_2 + p_1V_1 - p_2V_2 + p_2V_1}{2} =$$

$$= \frac{p_1V_3 + p_3V_3 - p_3V_1 - p_1V_2 - p_2V_2 + p_2V_1}{2}.$$

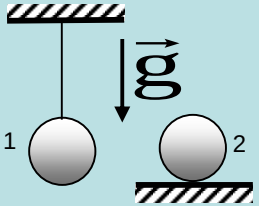
Заметим, что для состояний газа 2 и 3 справедливо соотношение (закон Бойля-Мариотта): $p_2V_2 = p_3V_3$.

Тогда

$$Q_{1\text{-}3} - Q_{1\text{-}2} = \frac{p_1V_3 - p_3V_1 - p_1V_2 + p_2V_1}{2} = \frac{p_1(V_3 - V_2) + (p_2 - p_3)V_1}{2} > 0,$$

т.к. $V_3 > V_2$; $p_2 > p_3$ – по условию.

Полученный результат означает, что $Q_{1\text{-}3} > Q_{1\text{-}2}$, т.е. в процессе 1 – 3 газ получает бóльшее количество теплоты.



22. *Два абсолютно одинаковых шарика массой m нагреваются в неодинаковых условиях: один подвешен на непроводящей тепло нити, другой лежит на непроводящей тепло подставке (см. рис.). Сначала оба шарика имели одинаковую температуру t^o_o. Затем им сообщили одинаковое количество теплоты Q. При этом первый шарик нагрелся на Δt^o_1, а второй – на Δt^o_2. Определить удельную теплоёмкость материала, из которого изготовлены шарики, считая изменения температуры Δt^o малыми.*

Решение. При одинаковой начальной температуре t^o_o шарики имеют одинаковый радиус R. При изменении температуры на Δt^o радиусы шариков изменяются на $\Delta R_1 = R\alpha\Delta t^o_1$ (первый шарик) и $\Delta R_2 = R\alpha\Delta t^o_2$ (второй шарик).

α – температурный коэффициент линейного расширения материала шариков.

В результате центр масс каждого шарика изменяет своё положение по вертикали: у первого шарика он опускается на ΔR_1, у второго – поднимается на ΔR_2.

В соответствии с первым законом термодинамики внутренняя энергия материала шариков изменяется, так как шарикам сообщается одинаковое количество теплоты Q и над шариками совершается работа A силой тяжести (при изменении положения их центров масс).

Работа A_1 силы тяжести над первым шариком положительна по знаку: $A_1 = mg\Delta R_1$.

Работа A_2 силы тяжести над вторым шариком отрицательна по знаку: $A_2 = -mg\Delta R_2$.

Тогда

$$\Delta U_1 = Q + A_1; \quad mc\Delta t^o_1 = Q + mgR\alpha\Delta t^o_1;$$

$$\Delta U_2 = Q + A_2; \quad mc\Delta t^o_2 = Q - mgR\alpha\Delta t^o_2;$$

Отсюда

$$mc\Delta t^o_1 - mgR\alpha\Delta t^o_1 = mc\Delta t^o_2 + mgR\alpha\Delta t^o_2;$$

$$c(\Delta t^o_1 - \Delta t^o_2) = gR\alpha(\Delta t^o_1 + \Delta t^o_2); \quad \alpha gR = \frac{\Delta t_1^o - \Delta t_2^o}{\Delta t_1^o + \Delta t_2^o} c;$$

$$mc\Delta t^o_1 = Q + \frac{\Delta t_1^o - \Delta t_2^o}{\Delta t_1^o + \Delta t_2^o} mc\Delta t_1^o; \quad Q = mc\left(1 - \frac{\Delta t_1^o - \Delta t_2^o}{\Delta t_1^o + \Delta t_2^o}\right)\Delta t_1^o.$$

$$Q = 2mc\frac{\Delta t_1^o \Delta t_2^o}{\Delta t_1^o + \Delta t_2^o}.$$

Отсюда

$$c = \frac{\Delta t_1^o + \Delta t_2^o}{2mc\Delta t_1^o \Delta t_2^o} Q = \frac{Q}{2m}\left(\frac{1}{\Delta t_1^o} + \frac{1}{\Delta t_2^o}\right) -$$ удельная теплоёмкость материала шариков.