Термодинамика

Глава VIII

Внутренняя энергия одноатомного идеального газа

Контрольные вопросы

1. *Чем термодинамика отличается от молекулярной физики?*

а) Термодинамика изучает тепловые явления с учётом молекулярного строения тел, а молекулярная физика – нет

б) Термодинамика изучает тепловые явления без учёта молекулярного строения тел, а молекулярная физика – с учётом

в) Термодинамика изучает тепловые явления, происходящие со всеми телами, молекулярная физика – только с идеальными газами.

г) Термодинамика изучает тепловые явления, происходящие только с идеальными газами, молекулярная физика – со всеми телами

2. *Внутренняя энергия тела – это …*

а) Сумма потенциальной энергии взаимодействия и кинетической энергии теплового движения молекул тела

б) Потенциальная энергия взаимодействия молекул тела

в) Кинетическая энергия теплового движения молекул тела

г) Разность между потенциальной энергией взаимодействия и кинетической энергией теплового движения молекул тела

3. *Какое выражение определяет внутреннюю энергию одноатомного идеального газа?*

а) $U = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT$

б) $U = mcT$

в) $U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT$

г) $U = \frac{m}{\mu} RT$

4. *Какое выражение определяет изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа?*

а) $\Delta U = \frac{m}{\mu} R\Delta T$

б) $\Delta U = mc\Delta T$

в) $\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T$

г) $\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R\Delta T$

Методы решения задач

1. *Какова внутренняя энергия 2 г аргона при температуре 127 °С? Молярная масса аргона 40 г/моль.*

Решение. Аргон – одноатомный газ. Внутренняя энергия U одноатомного идеального газа определяется выражением:

$U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT$, где m – масса газа, μ – молярная масса, R = = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Вычислим результат:

$$U = \frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}002\,\text{кг}}{0{,}040\,\text{кг/моль}} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 400\,\text{К} = 249{,}3\,\text{Дж}.$$

2. *Какова внутренняя энергия 4 моль некоторого одноатомного газа при температуре 27 °С?*

Решение. Внутренняя энергия U одноатомного идеального газа определяется выражением:

$U = \frac{3}{2}\nu RT$, где ν – количество вещества, R = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Вычислим результат:

$$U = \frac{3}{2} \cdot 4\,\text{моль} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 300\,\text{К} = 14958\,\text{Дж} \approx 15\,\text{кДж}.$$

3. *На сколько изменяется внутренняя энергия неона массой 20 г при нагревании на 100 °С? Молярная масса неона 20 г/моль.*

Решение. Изменение ΔU внутренней энергии одноатомного идеального газа определяется выражением:

$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R \Delta T$, где m – масса газа, μ – молярная масса, R = = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, ΔT – изменение абсолютной температуры.

Вычислим результат:

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}020\ \text{кг}}{0{,}020\ \text{кг/моль}} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 100\ \text{К} = 1246{,}5\ \text{Дж}.$$

4. *Сравнить внутренние энергии двух одноатомных идеальных газов одинаковой массы при одинаковой температуре.*

Решение. Запишем выражения для внутренней энергии газов и составим отношение этих выражений:

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{m}{\mu_1} RT \\ U_2 = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{m}{\mu_2} RT \end{cases} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{m}{\mu_1} RT}{\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{m}{\mu_2} RT}; \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Большей внутренней энергией обладает газ с меньшей молярной массой.

5. *Как изменяется внутренняя энергия одноатомного идеального газа при: а) изохорическом нагревании; б) изохорическом охлаждении; в) изобарическом нагревании; г) изобарическом охлаждении; д) изотермическом расширении?*

Решение. а) При изохорическом нагревании газа его температура увеличивается. Поэтому его внутренняя энергия увеличивается.

б) При изохорическом охлаждении газа его температура уменьшашается. Поэтому его внутренняя энергия уменьшается.

в) При изобарическом нагревании газа его температура увеличивается. Поэтому его внутренняя энергия увеличивается.

г) При изобарическом охлаждении газа его температура уменьшашается. Поэтому его внутренняя энергия уменьшается.

д) В изотермическом процессе температура газа остаётся неизменной. Поэтому его внутренняя энергия остаётся неизменной.

6. *Сравнить внутренние энергии гелия и аргона при условии, что масса гелия в 10 раз больше массы аргона, а температура аргона в 4 раза больше температуры гелия. Молярная масса гелия 0,004 кг/моль, аргона 0,040 кг/моль.*

Решение. Запишем выражения для внутренней энергии газов и составим отношение этих выражений:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{m_1}{\mu_1} RT_1 \\ U_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{m_2}{\mu_2} RT_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{m_1}{\mu_1} RT_1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{m_2}{\mu_2} RT_2}; \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{T_1}{T_2}.$$

$m_1 = 10m_2$; $T_2 = 4T_1$ – по условию.

Тогда $$\frac{U_1}{U_2} = \frac{10m_2}{m_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{T_1}{4T_1} = 2{,}5 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Вычислим результат: $$\frac{U_1}{U_2} = 2{,}5 \cdot \frac{0{,}040 \text{кг/моль}}{0{,}004 \text{кг/моль}} = 25.$$

Внутренняя энергия гелия в 25 раз больше.

7. *Какова внутренняя энергия одноатомного идеального газа, занимающего объём V при давлении p?*

Решение. Запишем выражение для расчёта внутренней энергии одноатомного идеального газа:

$$U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT.$$

Запишем уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Тогда выражение для U примет вид:

$$U = \frac{3}{2} pV.$$

8. *Какова внутренняя энергия аргона, занимающего объём V = = 30 м³ при давлении p = 150 кПа?*

Решение. Запишем выражение для расчёта внутренней энергии одноатомного идеального газа:

$$U = \frac{3}{2} pV.$$

Подставим в это выражение значения p и V и вычислим результат:

$$U = \frac{3}{2} \cdot 150 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot 30 \text{ м}^3 = 6{,}75 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

9. *Давление одноатомного идеального газа увеличили в 1,2 раза, а объём уменьшили на 40%. Как изменилась внутренняя энергия газа?*

Решение. $$\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} p_1 V_1 \\ U_2 = \frac{3}{2} p_2 V_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{3}{2} p_1 V_1}{\frac{3}{2} p_2 V_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{V_1}{V_2}.$$

$p_2 = 1{,}2p_1$; $V_2 = 0{,}6V_1$ – по условию.

Тогда $$\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{1{,}2p_1} \cdot \frac{V_1}{0{,}6V_1} = \frac{1}{1{,}2 \cdot 0{,}6} \approx 1{,}4; \quad \frac{U_2}{U_1} \approx \frac{1}{1{,}4}.$$

Внутренняя энергия газа уменьшилась приблизительно в 1,4 раза.

10. *Найти концентрацию атомов идеального газа в сосуде объёмом V = 5 л при температуре t^o = 127°С, если его внутренняя энергия U = 600 Дж.*

Решение. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа определяется выражением:

$U = \frac{3}{2}pV$, где p – давление газа, V – объём газа.

Давление газа p связано с его концентрацией n и температурой T соотношением: $p = nkT$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Тогда $U = \frac{3}{2}nkTV \Rightarrow n = \frac{2U}{3kTV}$.

Вычислим результат:

$$n = \frac{2 \cdot 600 Дж}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} (Дж / К) \cdot 400 К \cdot 5 \cdot 10^{-3} м^3} = 1{,}45 \cdot 10^{25} м^{-3}.$$

11. *Над идеальным одноатомным газом совершается процесс, в котором его давление изменяется пропорционально квадрату абсолютной температуры. При увеличении объёма от V_o = 2 л до V = = $3V_o$ внутренняя энергия газа уменьшилась на ΔU = 300 Дж. Определить давление p_o газа, когда он занимал объём V_o.*

Решение. $p = cT^2$ – зависимость давления газа от абсолютной температуры (c – некоторая постоянная).

Подставим зависимость p(T) в выражение для внутренней энергии одноатомного идеального газа:

$$U = \frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} cT^2 V.$$

Напишем выражения для внутренней энергии газа в начальном и конечном состояниях и получим отношение этих выражений:

$$\begin{cases} U_o = \frac{3}{2} c T_o^2 V_o \\ U = \frac{3}{2} c T^2 3V_o \end{cases} \Rightarrow \frac{U_o}{U} = \frac{\frac{3}{2} c T_o^2 V_o}{\frac{3}{2} c T^2 3V_o} = \frac{T_o^2}{3T^2}.$$

Отсюда

$$U = 3\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 U_o; \quad \Delta U = U - U_o = 3\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 U_o - U_o = U_o\left(3\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 - 1\right).$$

Для определения значения отношения T/T_o воспользуемся уравнением Клапейрона:

$$\frac{p_o V_o}{T_o} = \frac{pV}{T}; \ \frac{c T_o^2 V_o}{T_o} = \frac{c T^2 3V_o}{T}; \ T_o = 3T; \ \frac{T}{T_o} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\Delta U = U_o\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3} U_o \Rightarrow U_o = -\frac{3}{2}\Delta U = \frac{3}{2} p_o V_o.$$

$$p_o = -\frac{\Delta U}{V_o} = -\frac{-300\ \text{Дж}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3} = 150000\ \text{Па} = 150\ \text{кПа}.$$

12. *Изменение состояния одного моля идеального одноатомного газа происходит по закону pV^n = const. Найти изменение внутренней энергии при увеличении объёма в два раза для случаев: 1) n = 0; 2) n = 1; 3) n = 2. Начальная температура газа T_o = 300 К.*

Решение. Запишем выражения для U_o и U и получим значение отношения U_o/U:

$$\begin{cases} U_o = \frac{3}{2} p_o V_o = \frac{3}{2} \cdot \frac{const}{V_o^n} \cdot V_o = \frac{3}{2} \cdot \frac{const}{V_o^{n-1}} \\ U = \frac{3}{2} p 2V_o = \frac{3}{2} \cdot \frac{const}{(2V_o)^n} \cdot 2V_o = \frac{3}{2^n} \cdot \frac{const}{V_o^{n-1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{U_o}{U} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{const}{V_o^{n-1}}}{\frac{3}{2^n} \cdot \frac{const}{V_o^{n-1}}} = 2^{n-1}$$

Отсюда

$U = \frac{U_o}{2^{n-1}}$ – внутренняя энергия газа после расширения.

$\Delta U = U - U_o = \frac{U_o}{2^{n-1}} - U_o = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) U_o = \left(2^{1-n} - 1\right) U_o$ – изменение внутренней энергии газа после расширения.

Вычислим значение ΔU в каждом случае.

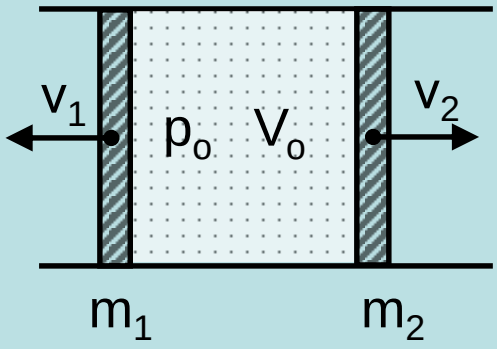
1) $\Delta U = \left(2^{1-0} - 1\right)U_o = U_o = \frac{3}{2}\nu RT_o = \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 300\text{К} = 3739{,}5\text{Дж}.$

2) $\Delta U = \left(2^{1-1} - 1\right)U_o = 0.$

3) $\Delta U = \left(2^{1-2} - 1\right)U_o = -\frac{1}{2}U_o = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\nu RT_o =$

$$-\frac{3}{4}\nu RT_o = -\frac{3}{4} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 300\text{К} = -1869{,}75\ \text{Дж}$$

13. *В длинной гладкой пустой (нет внешнего давления) теплоизолированной трубе находятся два поршня массами m_1 и m_2 (см. рис.), между которыми в объёме V_o при давлении p_o находится одноатомный газ. Поршни отпускают. Определить их максимальные скорости, если масса газа много меньше массы поршней.*



Решение. Внутренняя энергия газа в начальном состоянии равна

$$U_o = \frac{3}{2} p_o V_o .$$

После бесконечно большого расширения газа между поршнями его давление станет равным нулю, т.к. равно нулю внешнее давление.

Соответственно станет равной нулю и конечная внутренняя энергия газа.

Тогда $\Delta U = 0 - U_o = -U_o = -\frac{3}{2} p_o V_o$ – изменение внутренней энергии газа (газ охладился, так как $\Delta U < 0$).

Внутренняя энергия газа перешла в кинетическую энергию обоих поршней:

$$|\Delta U| = \frac{3}{2} p_o V_o = E_{k1} + E_{k2} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} .$$

Для системы тел, представленной в условии задачи, справедлив закон сохранения импульса в горизонтальном направлении:

$$0 = m_1 \upsilon_1 - m_2 \upsilon_2 ; \; m_1 \upsilon_1 = m_2 \upsilon_2 .$$

Отсюда $\upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1$ – максимальная скорость поршня массой m_2.

Тогда $\frac{3}{2}p_o V_o = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1\right)^2 =$

$$= \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{m_1+m_2}{m_2}\cdot\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}.$$

Из последнего выражения найдём максимальную скорость поршня массой m_1:

$$\upsilon_1^2 = 2\cdot\frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}\cdot\frac{3}{2}p_o V_o = \frac{3p_o V_o m_2}{m_1(m_1+m_2)}$$

$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{3p_o V_o m_2}{m_1(m_1+m_2)}}$ – максимальная скорость поршня массой m_1.

Тогда

$\upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 = \sqrt{\frac{3p_o V_o m_1}{m_2(m_1+m_2)}}$ – максимальная скорость поршня массой m_2.

14. *В длинной горизонтальной теплоизолированной трубе между двумя одинаковыми поршнями массой m каждый находится один моль одноатомного газа при температуре T_o. В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону (вдогонку друг другу) и равны v и 3 v. До какой максимальной температуры нагреется газ? Массой газа и теплоёмкостью поршней пренебречь.*

Решение. Суммарная начальная кинетическая энергия обоих поршней равна

$$E_{ko} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(3v)^2}{2} = 10\frac{mv^2}{2}.$$

Система тел, представленная в задаче, является замкнутой в горизонтальном направлении. Для этого направления справедлив закон сохранения импульса:

mv + 3mv = 2mu, где u – скорость движения поршней в конечном состоянии.

Отсюда u = 2v – конечная скорость поршней.

Суммарная конечная кинетическая энергия обоих поршней равна

$$E_k = 2\frac{mu^2}{2} = 2\frac{m(2v)^2}{2} = 8\frac{mv^2}{2}.$$

Определим модуль изменения кинетической энергии обоих поршней:

$$|\Delta E_k| = |E_k - E_{ko}| = E_{ko} - E_k = 2\frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Уменьшение суммарной кинетической энергии поршней равно увеличению внутренней энергии газа:

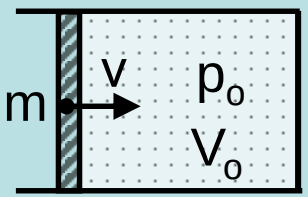
$$\Delta U = |\Delta E_k|; \quad \frac{3}{2}R\Delta T = 2\frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Отсюда

$$3R\Delta T = 2m\upsilon^2; \; \Delta T = T - T_o = \frac{2m\upsilon^2}{3R}$$

$T = T_o + \dfrac{2m\upsilon^2}{3R} -$ максимальная температура газа.

15. *Поршень массой m, замыкающий объём V_o одноатомного газа при давлении p_o и температуре T_o, приводят в движение с начальной скоростью v (см.рис). Найти температуру газа при максимальном сжатии. Теплоёмкостями поршня и сосуда пренебречь.*



Решение. Напишем выражение для начальной кинетической энергии поршня:

$$E_{ko} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

В момент максимального сжатия газа поршень останавливается, поэтому его кинетическая энергия становится равной нулю ($E_k = 0$).

Модуль изменения кинетической энергии поршня составляет

$$|\Delta E_k| = |E_k - E_{ko}| = |- E_{ko}| = E_{ko} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Модуль изменения кинетической энергии поршня равен изменению внутренней энергии газа:

$E_{ko} = \Delta U$; $\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{3}{2}\nu R(T - T_o)$, где T – температура газа при его максимальном сжатии.

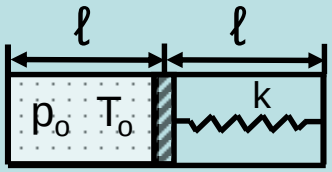
Отсюда $$T - T_o = \frac{m\upsilon^2}{3\nu R}; \qquad T = T_o + \frac{m\upsilon^2}{3\nu R}$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для начального состояния газа и получим из него выражение для νR:

$$p_o V_o = \nu R T_o \Rightarrow \nu R = \frac{p_o V_o}{T_o}.$$

Выражение для T принимает окончательный вид:

$$T = T_o + \frac{m\upsilon^2}{3\frac{p_o V_o}{T_o}} = T_o + \frac{m\upsilon^2 T_o}{3p_o V_o} = \left(1 + \frac{m\upsilon^2}{3p_o V_o}\right)T_o.$$



16. *В горизонтально расположенном теплоизолированном цилиндре сечением S и длиной 2ℓ удерживается тонкий поршень, делящий объём сосуда на две равные части. Одну половину занимает одноатомный газ при температуре T_o и давлении p_o, а в другой половине – вакуум. Поршень соединён с торцом вакуумированной части цилиндра пружи-*

ной жёсткостью k и длиной в недеформированном состоянии 2ℓ (см. рис.). Пренебрегая трением, найти установившуюся температуру газа после того, как поршень отпустили.

Решение. Зафиксируем параметры системы в начальном состоянии:

1) пружина деформирована на величину ℓ, поэтому она обладает потенциальной энергией упругой деформации

$$E_{po} = \frac{k\ell^2}{2};$$

2) внутренняя энергия одноатомного газа имеет значение

$$U_o = \frac{3}{2}\nu RT_o.$$

Зафиксируем параметры системы в конечном состоянии (поршень сместился из начального положения вправо по рисунку на x) :

3) пружина деформирована на величину ℓ + x, поэтому она обладает потенциальной энергией упругой деформации

$$E_p = \frac{k(\ell + x)^2}{2};$$

4) внутренняя энергия одноатомного газа имеет значение

$$U = \frac{3}{2}\nu RT.$$

Свяжем (с помощью уравнения Клапейрона) начальные и конечные параметры газа:

$$\frac{p_o S\ell}{T_o} = \frac{pS(\ell + x)}{T}.$$

Сила упругости пружины уравновешивает силу давления газа на поршень: $pS = k(\ell + x)$.

Тогда

$$\frac{p_o S\ell}{T_o} = \frac{k(\ell + x)^2}{T} \Rightarrow \quad (\ell + x)^2 = \frac{p_o S\ell}{kT_o}T.$$

Запишем закон сохранения энергии для начального и конечного состояния системы:

$$\frac{k\ell^2}{2} + \frac{3}{2}\nu RT_o = \frac{k}{2}(\ell + x)^2 + \frac{3}{2}\nu RT = \frac{k}{2}\cdot\frac{p_o S\ell}{kT_o}T + \frac{3}{2}\nu RT = \frac{p_o S\ell}{2T_o}T + \frac{3}{2}\nu RT.$$

Проведём с полученным выражением математические преобразования.

$$k\ell^2 + 3\nu RT_o = \frac{p_o S\ell}{T_o}T + 3\nu RT = \left(\frac{p_o S\ell}{T_o} + 3\nu R\right)T = \frac{p_o S\ell + 3\nu RT_o}{T_o}T.$$

Отсюда

$$T = \frac{k\ell^2 + 3\nu RT_o}{p_o S\ell + 3\nu RT_o}T_o.$$

Воспользуемся выражением для внутренней энергии газа в начальном состоянии:

$$\frac{3}{2}\nu RT_o = \frac{3}{2}p_o S\ell \Rightarrow \nu RT_o = p_o S\ell.$$

Выражение для T принимает окончательный вид:

$$T = \frac{k\ell^2 + 3p_o S\ell}{p_o S\ell + 3p_o S\ell}T_o = \frac{k\ell + 3p_o S}{4p_o S}T_o.$$