Глава VII
Тепловое расширение твёрдых и жидких тел

Контрольные вопросы

1. *По какому закону изменяются линейные размеры твёрдого тела при изменении его температуры?*

а) $\ell = \ell_o\left(1+\alpha t^o\right)$ б) $\ell = \ell_o\left(1-\alpha t^o\right)$

в) $\ell = \ell_o\left(1+\alpha^2 t^o\right)$ г) $\ell = \ell_o\left(1+\alpha (t^o)^2\right)$

ℓ – длина образца при температуре t^o, ℓ_o – длина образца при температуре 0^oC.
α – температурный коэффициент линейного расширения материала образца

2. *По какому закону изменяется объём твёрдого тела при изменении его температуры?*

а) $V = V_o\left(1 - \beta t^o\right)$

б) $V = V_o\left(1 + \beta t^o\right)$

в) $V = V_o\left(1 - \alpha^2 t^o\right)$

г) $V = \dfrac{V_o}{1 + \alpha (t^o)^2}$

V – объём образца при температуре t^o, V_o – объём образца при температуре 0^oC.

α – температурный коэффициент линейного расширения материала образца

β – температурный коэффициент объёмного расширения материала образца

3. *По какому закону изменяется плотность жидкости при изменении её температуры?*

а) $\rho = \rho_o\left(1 + \beta t^o\right)$

б) $\rho = \dfrac{\rho_o}{1 + \alpha (t^o)^2}$

в) $\rho = \rho_o\left(1 - \alpha^2 t^o\right)$

г) $\rho = \rho_o\left(1 - \beta t^o\right)$

ρ – плотность жидкости при температуре t^o, ρ_o – плотность жидкости при температуре 0^oC.
α – температурный коэффициент линейного расширения жидкости
β – температурный коэффициент объёмного расширения жидкости

4. *Какова связь между коэффициентами линейного α и объёмного β расширения тел?*

$\alpha = \beta$ $\alpha = 3\beta$ $\beta = 3\alpha$ $\beta = 2\alpha$

5. *Каковы особенности теплового расширения воды?*

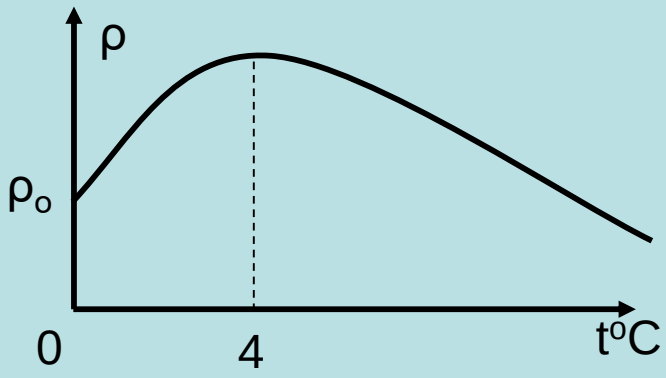
а) В интервале температур от $0^{o}C$ до $4^{o}C$ плотность воды возрастает, далее – убывает

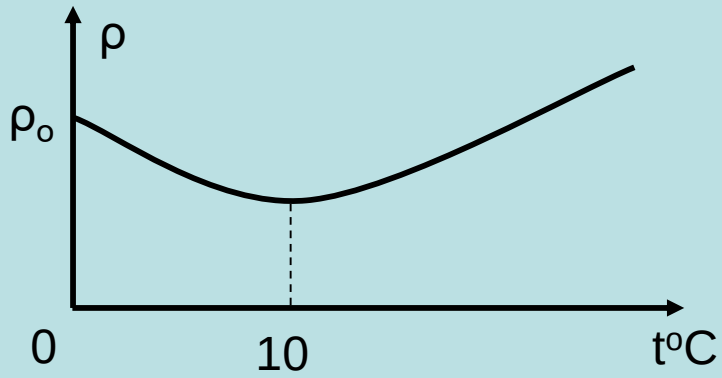
б) В интервале температур от $0^{o}C$ до $10^{o}C$ плотность воды возрастает, далее – убывает

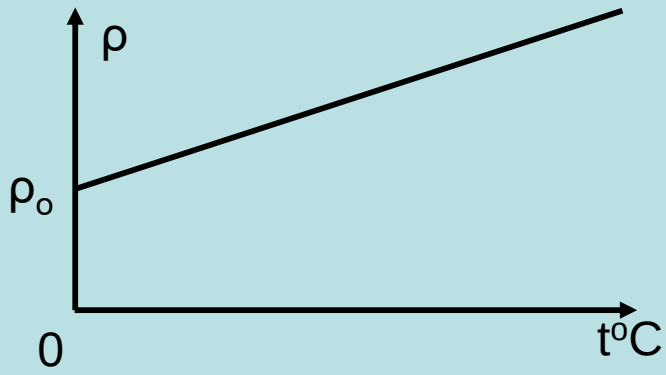
в) В интервале температур от $0^{o}C$ до $4^{o}C$ плотность воды убывает, далее – возрастает

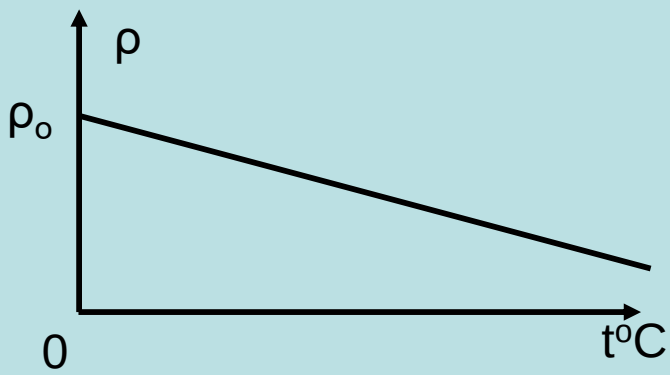
г) В интервале температур от $0^{o}C$ до $100^{o}C$ плотность воды убывает

6. *Какой график правильно выражает зависимость плотности воды от температуры?*









Методы решения задач

1. *Колесо локомотива имеет диаметр 1 м при 0°С. На сколько отличаются расстояния, пройденные поездом за 1 час зимой и летом при температурах – 25°С и + 25°С, если в обоих случаях частота вращения колёс составляла 480 об/мин? Температурный коэффициент линейного расширения стали $1{,}2\cdot10^{-5}$ $К^{-1}$.*

Дано: d_o = 1 м; t^o_1 = – 25°С; t^o_2 = 25°С; n = 480 $мин^{-1}$ = 8 $с^{-1}$; α = $=1{,}2\cdot10^{-5}$ $К^{-1}$

$\Delta\ell$ – ?

Решение. $\ell = \pi dN = \pi dnt$ – расстояние, пройденное колесом локомотива за время t (πd – длина окружности колеса, N = nt – число оборотов колеса за время t).

$\ell_1 = \pi d_1 N = \pi d_1 nt$ – расстояние, пройденное колесом локомотива за время t при температуре t^o_1.

$\ell_2 = \pi d_2 N = \pi d_2 nt$ – расстояние, пройденное колесом локомотива за время t при температуре t^o_2.

$\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1 = \pi d_2 nt - \pi d_1 nt = \pi nt(d_2 - d_1)$ – разность расстояний, пройденных колесом локомотива.

$d = d_o(1 + \alpha t^o)$ – зависимость длины диаметра колеса от температуры.

$d_1 = d_o(1 + \alpha t^o_1)$ – длина диаметра колеса при температуре t^o_1.

$d_2 = d_o(1 + \alpha t^o_2)$ – длина диаметра колеса при температуре t^o_2.

Тогда

$\Delta\ell = \pi nt d_o(1 + \alpha t^o_2 - 1 - \alpha t^o_1) = \pi nt d_o \alpha(t^o_2 - t^o_1)$ – искомая разность расстояний, пройденных колесом локомотива за 1 час летом и зимой.

После подстановки численных значений величин получим

$\Delta\ell = 54{,}3$ м.

2. *Вес куска металла, погруженного в известную жидкость, уменьшается на P_1 при температуре t^o_1 и на P_2 при температуре t^o_2 по сравнению с его весом в воздухе. Определить температурный коэффициент линейного расширения металла.*

Дано: t^o_1; t^o_2; P_1; P_2;

α – ?

Решение. При погружении в жидкость вес тела уменьшается на величину выталкивающей силы.

$P_1 = \rho_{ж1} g V_1 = \frac{\rho^o_ж}{1+\beta t^o_1} g V_o \left(1+3\alpha t^o_1\right)$ – уменьшение веса куска металла при температуре t^o_1 ($\rho^o_ж$ – плотность жидкости при 0^oC, β – температурный коэффициент объёмного расширения жидкости, V_o – объём тела при 0^oC, α – температурный коэффициент линейного расширения металла).

$P_2 = \rho_{ж2} g V_2 = \frac{\rho^o_ж}{1+\beta t^o_2} g V_o \left(1+3\alpha t^o_2\right)$ – уменьшение веса куска металла при температуре t^o_2.

Тогда $$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\dfrac{\rho_{ж}^{o}}{1+\beta t_1^{o}} gV_o\left(1+3\alpha t_1^{o}\right)}{\dfrac{\rho_{ж}^{o}}{1+\beta t_2^{o}} gV_o\left(1+3\alpha t_2^{o}\right)} = \frac{1+\beta t_2^{o}}{1+\beta t_1^{o}} \cdot \frac{1+3\alpha t_1^{o}}{1+3\alpha t_2^{o}}.$$

Проведём с полученным выражением дальнейшие математические преобразования.

$$P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right)\left(1+3\alpha t_2^{o}\right) = P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right)\left(1+3\alpha t_1^{o}\right).$$

$$P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right) + P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right)3\alpha t_2^{o} = P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right) + P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right)3\alpha t_1^{o}.$$

$$P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right)3\alpha t_2^{o} - P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right)3\alpha t_1^{o} = P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right) - P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right).$$

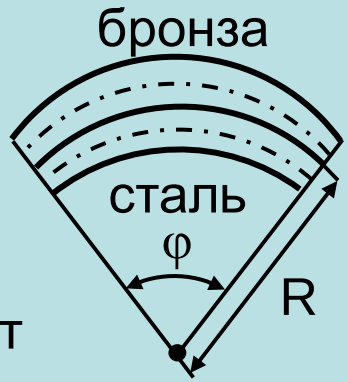
$$3\alpha\left(P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right)t_2^{o} - P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right)t_1^{o}\right) = P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right) - P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right).$$

Отсюда $$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right) - P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right)}{P_1\left(1+\beta t_1^{o}\right)t_2^{o} - P_2\left(1+\beta t_2^{o}\right)t_1^{o}} -$$ температурный коэффициент линейного расширения металла.

3. *Стальная и бронзовая пластинки одинаковой толщины а = 0,2 мм склёпаны на концах так, что при температуре T_1 = 293 К образуют плоскую биметаллическую пластинку. Каков будет радиус кривизны этой пластинки при температуре T_2 = 393 К? Коэффициенты линейного расширения стали и бронзы $\alpha_1 = 1{,}1\cdot10^{-5}$ $К^{-1}$, $\alpha_2 = 2\cdot10^{-5}$ $К^{-1}$.*

Дано: $a = 0{,}2$ мм $= 2\cdot10^{-4}$ м; $T_1 = 293$ К; $T_2 = 393$ К; $\alpha_1 = 1{,}1\cdot10^{-5}$ $К^{-1}$; $\alpha_2 = 2\cdot10^{-5}$ $К^{-1}$

R – ?



Решение. Пусть R – радиус кривизны средней линии всей биметаллической пластинки (см. рис.); ℓ – длина пластинки при температуре T_1; $\Delta T = T_2 - T_1$ – разность температур.

При изгибе наименьшую деформацию испытывает слой, близкий к середине каждой пластинки, поэтому будем считать, что длина средней линии каждой пластинки равна длине, которую бы она имела в неизогнутом состоянии.

$R_1 = R - a/2$ – радиус кривизны средней линии стальной пластинки.

$R_2 = R + a/2$ – радиус кривизны средней линии бронзовой пластинки.

$\ell_1 = R_1\varphi = (R - a/2)\varphi = \ell(1 + \alpha_1\Delta T)$ – длина стальной пластинки при температуре T_2.

$\ell_2 = R_2\varphi = (R + a/2)\varphi = \ell(1 + \alpha_2\Delta T)$ – длина бронзовой пластинки при температуре T_2.

Отсюда

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell(1+\alpha_1\Delta T)}{\ell(1+\alpha_2\Delta T)} = \frac{(R-a/2)\varphi}{(R+a/2)\varphi}; \quad \frac{R-a/2}{R+a/2} = \frac{1+\alpha_1\Delta T}{1+\alpha_2\Delta T}; \quad \frac{2R-a}{2R+a} = \frac{1+\alpha_1\Delta T}{1+\alpha_2\Delta T}$$

Тогда

$$(2R-a)(1+\alpha_2\Delta T) = (2R+a)(1+\alpha_1\Delta T)$$

$$2R(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T = 2a + a(\alpha_1+\alpha_2)\Delta T; R = \frac{a\left(2+(\alpha_1+\alpha_2)\Delta T\right)}{2(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T} = 22{,}5\,\text{см} -$$

радиус кривизны всей биметаллической пластинки.

4. Стержень длиной ℓ_{o1} сделан из материала с температурным коэффициентом линейного расширения α_1, а стержень длиной ℓ_{o2} – из материала с коэффициентом линейного расширения α_2. Стержни спаяли, и получился стержень длиной $\ell_{o1} + \ell_{o2}$. Каков его коэффициент линейного расширения?

Дано: ℓ_{o1}; ℓ_{o2}; α_1; α_2

α^* – ?

Решение. $\ell_1 = \ell_{o1}(1 + \alpha_1\Delta t^o)$ – длина первого стержня после его нагревания на Δt^o.

$\ell_2 = \ell_{o2}(1 + \alpha_2\Delta t^o)$ – длина второго стержня после его нагревания на Δt^o.

$\ell_1 + \ell_2 = \ell_{o1}(1 + \alpha_1\Delta t^o) + \ell_{o2}(1 + \alpha_2\Delta t^o) = (\ell_{o1} + \ell_{o2}) + (\ell_{o1}\alpha_1 + \ell_{o2}\alpha_2)\Delta t^o$ – длина составного стержня после нагревания на Δt^o.

$\Delta\ell = (\ell_{o1} + \ell_{o2}) + (\ell_{o1}\alpha_1 + \ell_{o2}\alpha_2)\Delta t^o - (\ell_{o1} + \ell_{o2}) = (\ell_{o1}\alpha_1 + \ell_{o2}\alpha_2)\Delta t^o$ – абсолютное удлинение составного стержня после нагревания на Δt^o ($\ell_{o1} + \ell_{o2}$ – длина составного стержня до нагревания)

Тогда $\alpha^* = \dfrac{\Delta\ell}{(\ell_{o1} + \ell_{o2})\Delta t^o} = \dfrac{\ell_{o1}\alpha_1 + \ell_{o2}\alpha_2}{\ell_{o1} + \ell_{o2}}$ – температурный коэффициент линейного расширения составного стержня длиной $\ell_1 + \ell_2$.

5. Медный стержень зажат между двумя опорами. Его температуру увеличили на 100°С. Какое механическое напряжение возникает в стержне?

Дано: $\alpha = 20\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$; $\Delta t^o = 100^o$; $E = 13\cdot10^{10}$ Па

σ – ?

Решение. $\ell = \ell_o(1 + \alpha\Delta t^o)$ – длина стержня после нагревания на Δt^o (ℓ_o – длина стержня перед нагреванием, α – температурный коэффици-ент линейного расширения меди).

Тогда

$\Delta\ell = \ell - \ell_o = \ell_o\alpha\Delta t^o$ – абсолютное удлинение стержня.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_o} = \frac{\ell_o\alpha\Delta t^o}{\ell_o} = \alpha\Delta t^o -$$ относительное удлинение стержня.

По закону Гука для упругой деформации растяжения-сжатия

$\sigma = E\varepsilon = E\alpha\Delta t^o = 260\cdot10^6$ Па = 260 МПа – механическое напряжение в мед-

ном стержне (E – модуль Юнга для меди).

6. *Между двумя стенками помещён стержень сечения S, состоящий из двух частей одинаковой длины ℓ/2, имеющих коэффициенты линейного расширения α_1 и α_2 и модули Юнга E_1 и E_2. При температуре T_1 торцы стержня лишь касаются стенок. С какой силой стержень будет давить на стенки, если стержень нагреть до температуры T_2? Деформацией стенок пренебречь. На сколько сместится место стыка частей стержня?*

Дано: $\ell/2$; α_1; α_2; E_2; E_2; T_1; T_2

F – ? ΔL – ?

Решение. Будем считать, что стержень нагревается на $\Delta T = T_2 - T_1$ в отсутствие ограничивающих стенок.

Абсолютное удлинение половины стержня с коэффициентом линейного расширения α_1 составит $\Delta\ell_1 = \frac{\ell}{2}\alpha_1\Delta T$.

Абсолютное удлинение половины стержня с коэффициентом линейного расширения α_2 составит $\Delta\ell_2 = \frac{\ell}{2}\alpha_2\Delta T$.

Абсолютное удлинение всего стержня составит $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 =$

$$= \frac{\ell}{2}\Delta T(\alpha_1 + \alpha_2).$$

При наличии ограничивающих стенок нагретый до температуры T_2 стержень будет сжат на ту же величину $\Delta\ell = \frac{\ell}{2}\Delta T(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Сила упругости в обеих частях стержня при этом будет одинаковой по модулю (III закон Ньютона):

$$\frac{F}{S} = E_1\frac{\Delta\ell_1}{\ell_1} \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{F\ell_1}{SE_1}; \Delta\ell_2 = \frac{F\ell_2}{SE_2},$$

где ℓ_1 – длина половины стержня с коэффициентом линейного расширения α_1 при температуре T_2, ℓ_2 – длина половины стержня с коэффициентом линейного расширения α_2 при температуре T_2.

Тогда

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \frac{F}{S}\left(\frac{\ell_1}{E_1} + \frac{\ell_2}{E_2}\right).$$

Заменим это выражение приближённым: $\Delta\ell \approx \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\frac{F}{S}$.

Такая замена (из-за малости значений α_1 и α_2) создаёт пренебрежимо малую абсолютную ошибку $\Delta\ell << \ell$.

Отсюда $F = \dfrac{2E_1E_2S}{\ell(E_1+E_2)}\Delta\ell = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{E_1+E_2}E_1E_2S(T_2-T_1)$ – сила, с которой стержень давит на стенки.

Смещение места стыка двух частей стержня складывается из двух перемещений: 1) допустим, перемещения $(\ell/2)\alpha_1\Delta T$ конца первого стержня при тепловом расширении и 2) его обратного перемещения $\dfrac{F\ell_1}{SE_1}$ за счёт сжатия.

Итак, $\Delta L = \dfrac{\ell}{2}\left(\alpha_1(T_2-T_1)-\dfrac{F}{SE_1}\right) = \dfrac{\ell}{2}\left(\alpha_1-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{E_1+E_2}E_2\right)(T_2-T_1) =$

$= \dfrac{\ell}{2}\cdot\dfrac{\alpha_1E_1-\alpha_2E_2}{E_1+E_2}(T_2-T_1)$ – смещение места стыка частей стержня.

7. *Два секундных маятника, первый медный, а второй – железный, отбивают секунды при температуре t^o_1 = - 2°С. На сколько секунд отстанет в сутки медный маятник от железного, если температура помещения поднимется до t^o_2 = 18°С? Коэффициенты линейного расширения меди и железа равны соответственно $\alpha_1 = 1{,}7\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$ и $\alpha_2 = 1{,}2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.*

Дано: $t^o_1 = -2^oC$; $t^o_2 = 18^oC$; $\alpha_1 = 1{,}7\cdot10^{-5}$ K^{-1}; $\alpha_2 = 1{,}2\cdot10^{-5}$ K^{-1}

Δt – ?

Решение. $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_{o1}(1+\alpha_1 t_1^o)}{g}}$ – период колебаний медного маятника при температуре t^o_1 = - 2°С.

$T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_{o2}(1+\alpha_2 t_1^o)}{g}}$ – период колебаний железного маятника при температуре t^o_1 = - 2°С.

ℓ_{o1} и ℓ_{o2} – длина медного и железного маятника соответственно при 0°С.

$$T'_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{o1}(1+\alpha_1 t_2^o)}{g}}$$ – период колебаний медного маятника при температуре $t^o_2 = 18^oC$.

$$T'_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{o2}(1+\alpha_2 t_2^o)}{g}}$$ – период колебаний железного маятника при температуре $t^o_2 = 18^oC$.

Составим отношения T'_1/T_1 и T'_2/T_2.

$$\frac{T'_1}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_{o1}(1+\alpha_1 t_2^o)}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_{o1}(1+\alpha_1 t_1^o)}{g}}} = \sqrt{\frac{1+\alpha_1 t_2^o}{1+\alpha_1 t_1^o}} = \sqrt{\frac{(1+\alpha_1 t_2^o)(1-\alpha_1 t_1^o)}{(1+\alpha_1 t_1^o)(1-\alpha_1 t_1^o)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\alpha_1 t_2^o)(1-\alpha_1 t_1^o)}{1-(\alpha_1 t_1^o)^2}} \approx \sqrt{(1+\alpha_1 t_2^o)(1-\alpha_1 t_1^o)} \approx \sqrt{1-\alpha_1 t_1^o+\alpha_1 t_2^o} =$$

$$= \sqrt{1+\alpha_1(t_2^o - t_1^o)}.$$

Воспользуемся приближённым равенством $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ $(x \ll 1)$.

Тогда $\frac{T_1'}{T_1} = 1 + \frac{\alpha_1(t_2^o - t_1^o)}{2}$.

$$\frac{T_2'}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_{o2}(1+\alpha_2 t_2^o)}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_{o2}(1+\alpha_2 t_1^o)}{g}}} = \sqrt{\frac{1+\alpha_2 t_2^o}{1+\alpha_2 t_1^o}} = \sqrt{\frac{(1+\alpha_2 t_2^o)(1-\alpha_2 t_1^o)}{(1+\alpha_2 t_1^o)(1-\alpha_2 t_1^o)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\alpha_2 t_2^o)(1-\alpha_2 t_1^o)}{1-(\alpha_2 t_1^o)^2}} \approx \sqrt{(1+\alpha_2 t_2^o)(1-\alpha_2 t_1^o)} \approx$$

$$\approx \sqrt{1-\alpha_2 t_1^o + \alpha_2 t_2^o} = \sqrt{1+\alpha_2(t_2^o - t_1^o)}.$$

Воспользуемся приближённым равенством $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ $(x \ll 1)$.

Тогда $\frac{T_2'}{T_2} = \frac{T_2'}{T_2} = 1 + \frac{\alpha_2(t_2^o - t_1^o)}{2}$

Определим разность периодов ΔT колебаний обоих маятников при температуре $t^o_2 = 18^oC$.

$$\Delta T = T'_1 - T'_2 = T_1\left(1+\frac{\alpha_1(t^o_2 - t^o_1)}{2}\right) - T_2\left(1+\frac{\alpha_2(t^o_2 - t^o_1)}{2}\right) =$$

$$= T_1\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(t^0_2 - t^0_1)}{2} \qquad (T_1 = T_2 = 1c)$$

За сутки (t_o = 24 ч = 86400 с) железный маятник совершит $N_2 = t_o/T_2$ колебаний. При этом медный маятник отстанет от железного на отрезок времени $\Delta t = \Delta T \cdot N_2$.

$$\Delta t = T_1\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(t^o_2 - t^o_1)}{2}\cdot\frac{t_o}{T_2\left(1+\frac{\alpha_2(t^o_2 - t^o_1)}{2}\right)} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)(t^o_2 - t^o_1)t_o}{2\left(1+\frac{\alpha_2(t^o_2 - t^o_1)}{2}\right)} \approx$$

$$\approx \frac{(\alpha_1-\alpha_2)(t^o_2 - t^o_1)t_o}{2}\left(1-\frac{\alpha_2(t^o_2 - t^o_1)}{2}\right) = 4{,}32\,c$$

8. *Алюминиевый диск при нагревании увеличил свой объём на ΔV = 4,6 см^3. Какое количество теплоты при этом было затрачено, если начальная температура диска 0°С? Коэффициент линейного расширения алюминия α = 22,9·10^{-6} К$^{-1}$, его плотность ρ = 2700 кг/м^3, удельная теплоёмкость алюминия с = 900 Дж/(кг·1°С).*

Дано: $\Delta V = 4{,}6\cdot10^{-6}$ м^3; $\alpha = 22{,}9\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$; ρ = 2700 кг/м^3; с = 900 Дж/(кг·1°С)

Q – ?

Решение. Изменение объёма твёрдого тела при нагревании на ΔT определяется выражением $\Delta V = V_o 3\alpha\Delta T$, где V_o – объём тела при температуре 0°С, α – температурный коэффициент линейного расширения.

Напишем выражение для количества теплоты, затраченного на нагревание диска: $Q = mc\Delta T = \rho V_o c\Delta T$, где m – масса диска, с – удельная теплоёмкость алюминия, ρ – плотность алюминия.

Отсюда

$$V_o = \frac{\Delta V}{3\alpha\Delta T};\ Q = \rho\frac{\Delta V}{3\alpha\Delta T}c\Delta T = \frac{\rho c\Delta V}{3\alpha} = 162{,}7\ \text{кДж}.$$